

芸術的な高校入試第 25 回

出典：2020 年度 都立 新宿高校	
難易度：★★★☆☆	美しさ：★★★★★★
総試験時間：50 分	配点：40 点/100 点

次の各問に答えよ。

問 1

$$\left(\frac{5}{7} - \frac{1}{21}\right) \times \frac{3}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \div \sqrt{\frac{9}{8}} \text{ を計算せよ。}$$

問 2 二次方程式

$$(2x + 3)^2 - 3(x + 3) + 2 = 1 \text{ を解け。}$$

問 3

$$x = \frac{5 - 4\sqrt{7}}{2}, y = \frac{5 + 8\sqrt{7}}{2} \text{ のとき,}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 4y \text{ の値を求めよ。}$$

問 4

箱の中に、1, 2, 3, 4, 5, 6 の数字を 1 つずつ書いた 6 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ が入っている。

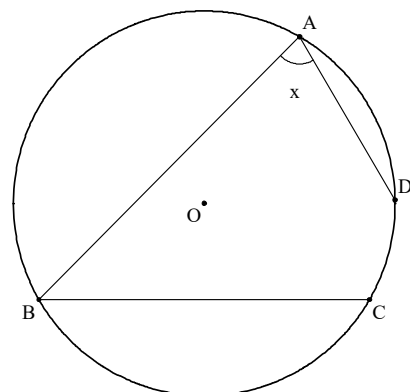
この箱の中にある 6 枚のカードから、カードを 1 枚取り出し、取り出したカードに書いてある数字を a とし、取り出したカードを箱の中に戻して、もう一度箱の中にある 6 枚のカードから 1 枚取り出し、取り出したカードに書いてある数字を b とするとき、 $\frac{2a+b}{\sqrt{ab}}$ が整数となる確率を求めよ。

ただし、どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとする。

問 5

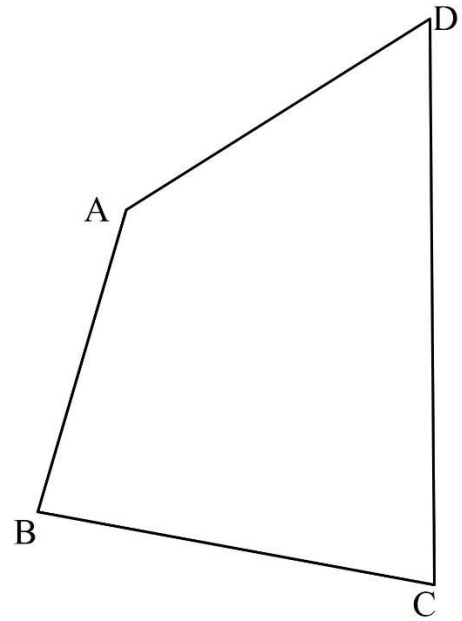
図 1 のように、円 O の周上に、4 点 A, B, C, D がある。点 A と点 B , 点 A と点 D , 点 B と点 C , 点 C と点 D をそれぞれ結ぶ。 $AB = BC$ とし、点 C を含まない \widehat{AB} の長さが、点 B を含まない \widehat{AD} の長さの 3 倍であり、点 C を含まない \widehat{AB} の長さが、点 B を含まない \widehat{CD} の長さの 6 倍であるとき、 x で示した $\angle BAD$ の大きさは何度か。

図 1



問6

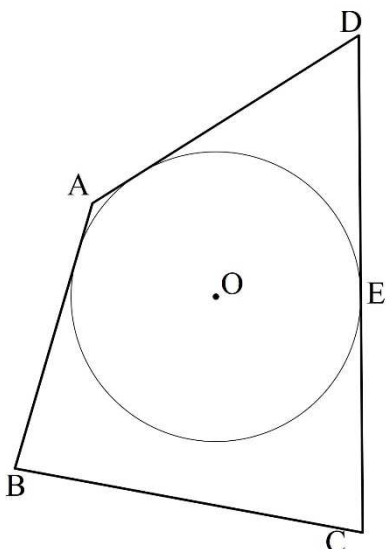
消費税 8%の商品 A を税込み価格 (a) 円で、消費税 10%の商品 B を税込み価格 (b) 円で、それぞれ現金で購入するときに支払う消費税額を計算すると、合計 60 円であった。商品 A と B を、キャッシュレス決済（現金を使わない支払い方法）で購入するとき、それぞれの税込み価格に対して 5%分の金額が、支払い時に値引きされるお店で支払う金額を計算すると、合計 722 円であった。 (a) , (b) に当てはまる数を求めよ。



問7

図2で、四角形 ABCD の辺 AB, 辺 AD, 辺 CD にそれぞれ接する円の中心を O とし、辺 CD との接点を E とする。回答欄に示した図をもとにして、点 E を定規とコンパスを用いて作図によって求め、点 E の位置を示す文字 E も書け。ただし、作図に用いた線は消さないでおくこと。

図2



【解答例】

問1 (5点)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{5}{7} - \frac{1}{21}\right) \times \frac{3}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \div \sqrt{\frac{9}{8}} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

問2 (5点)

$$\begin{aligned} & (2x+3)^2 - 3(x+3) + 2 = 1 \\ & 4x^2 + 12x + 9 - 3x - 9 + 1 = 0 \\ & 4x^2 + 9x + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{65}}{8}$$

問3 (5点)

$$\begin{aligned} & x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 4y \\ &= (x+y)^2 + 4(x-y) \\ &= (5+2\sqrt{7})^2 + 4(-6\sqrt{7}) \\ &= 25 + 20\sqrt{7} + 28 - 24\sqrt{7} = \mathbf{53 - 4\sqrt{7}} \end{aligned}$$

問4 (5点)

①

まず \sqrt{ab} が整数になるには,

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

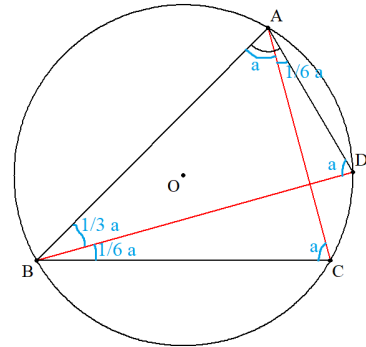
の8通り。

②

上記の a, b において, $2a+b$ が割り切れないのは, $a=4, b=1$ のみ。したがって, 合計7通り。

問5 (5点)

$\angle BAC = \angle BCA = a$ とし, 条件をもとに図に描きこんでいく。



すると, $\triangle ABD$ において,

$$\frac{1}{3}a + a + \frac{7}{6}a = \frac{15}{6}a = 180 \quad \text{より, } a = 72$$

$$x = \frac{7}{6}a = \mathbf{84}$$

問 6 (4 点 × 2)

前半の条件から、

$$\frac{8}{108}a + \frac{10}{110}b = 60 \dots \textcircled{1}$$

後半の条件から、

$$\frac{95}{100}a + \frac{95}{100}b = 722 \dots \textcircled{2}$$

この連立方程式を解く。

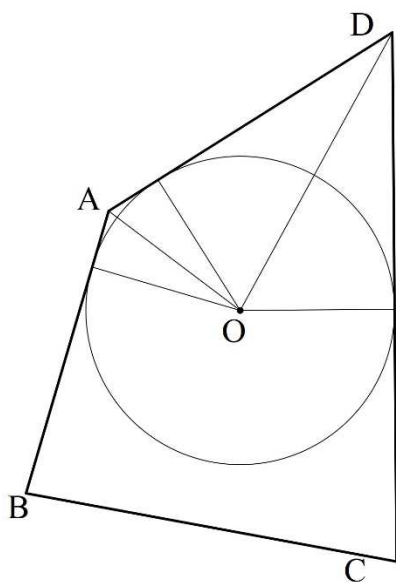
②より、 $a + b = 760$ $a = 760 - b$ ①に代入して。

$$\frac{8}{108}(760 - b) + \frac{1}{11}b = 60 \quad \text{両辺 } 108 * 11 \text{ かけて}$$

$$66880 - 88b + 108b = 71280 \quad 20b = 4400 \quad \mathbf{b = 220}$$

$$\mathbf{a = 540}$$

問 7 (7 点)



OA, OD を利用して、合同な三角形がたくさんできることが分かる。よって、まずは、① $\angle A, D$ の二等分線を引き、中心 O を作図。その後、②点 O から、辺 CD に垂線を下ろせばよい。

【コメント】

適当に高校入試の問題を見ていたら、新宿高校の「キャッシュレス還元」が目にとまりました。小問集合だったので、とりあえず全部紹介。

問 6, 非常に面白いです。どんな風に割引がなされるのか、考えるきっかけにもなりますし、何よりそれなりに捻ってあります。①は、例えば本体価格が x 円で、消費税 8% だった場合、

本体価格 消費税込み

$$\frac{100}{100}x \quad \frac{108}{100}x$$

となりますから、もし消費税込み y 円だったら、その逆算をすればよいので、

本体価格 消費税込み

$$\frac{100}{108}y \quad \frac{108}{108}y$$

となります。

あとは、②が簡単な式になることに気づいて、上手く計算を頑張れるかです。ただキャッシュレス還元で面白くしているだけでなく、入試としても丁度よいですね。素晴らしい。

ただ残念なのが、今月末でキャッシュレス還元終了。結構割引されてたから困る.....。

地味に他の問題も丁度よいです。

【作成】

「高校入試 数学 良問・難問」

<https://hokkaimath.blog.fc2.com/>