何ですか，青チャートですか		
範囲：小問集合	難易度：★×6	得点　　/25

出典：2018 年度　西大和学園高校（高校入試）

次の各問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}$ のとき，$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$ の値を求めよ。

(2)　$\sqrt{12n}$ と $\sqrt{5n+9}$ がともに整数になるような自然数nのうち，最小のものを求めよ。

(3)　2 つの関数$y=ax^2$と$y=-5x+3$ において，xの値が$\dfrac{1}{5}$から$\dfrac{14}{5}$まで増加するときの変化の割合が等しくなる。このとき，定数 a の値を求めよ。

(4)　1 個のさいころを 3 回投げて，出た目の数を順にx，y，zとする。このとき，$\dfrac{z}{x+y}=1$ となる確率は［　①　］であり，$\dfrac{4z}{x+y}$が 3 の倍数となる確率は［　②　］である。［　①　］，［　②　］にあてはまる数を求めよ。

(5)　10%の食塩水 200 g を入れた容器がある。この容器から x g の食塩水をくみ出した後，x g の水を入れてよくかき混ぜた。さらに，x g の食塩水をくみ出した後，x g の水を入れてよくかき混ぜたところ，濃度が 3.6%になった。このとき，x の値を求めよ。

【解答例】

（1）（5 点）※普通の中学生は無理

$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k$と置くと，$x=2k$，$y=3k$，$z=4k$なので，

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}=\frac{4k^2+9k^2+16k^2}{6k^2+12k^2+8k^2}=\mathbf{\frac{29}{26}}$$

（2）（5 点）

$\sqrt{12n}=\sqrt{2^2\times 3n}$なので，$n=3k^2$ (kは自然数)

$\sqrt{5n+9}=\sqrt{15k^2+9}=l$と置くと$(l>5)$，$15k^2+9=l^2$

$(l+3)(l-3)=15k^2$，lが最も小さくなるとき，$l=12$，$k=3$

$n=3\times 3^2=\mathbf{27}$

（3）（5 点）

$y=ax^2$において，xの値がpからqまで増加するときの変化の割合は，

$\frac{a(p^2-q^2)}{p-q}=\frac{a(p+q)(p-q)}{p-q}=a(p+q)$ なので，$a\left(\frac{1}{5}+\frac{14}{5}\right)=3a=-5$

$$\boldsymbol{a=-\frac{5}{3}}$$

（4）

1 個のさいころを 3 回投げたとき，出目は 6^3＝216 通りある。

①（2 点）

$\frac{z}{x+y}=1$ より，$z=x+y$，$z=2,3,4,5,6$ となるので，

$z=2$ のとき，$(x,y)=(1,1)$の 1 通り

$z=3$ のとき，$(x,y)=(1,2),(2,1)$の 2 通り

$z=4$ のとき，$(x,y)=(1,3),(2,2),(3,1)$の 3 通り

$z=5$ のとき 4 通り，$z=6$ のとき 5 通り，計 15 通り，$\frac{15}{216}=\mathbf{\frac{5}{72}}$

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/

②（3 点）

kを正の整数とし，$\dfrac{4z}{x+y}=3k$となる。$4z=3k(x+y)$

4 と 3 は互いに素だから，zは 3 の倍数なので，$z=3,6$

$z=3$ のとき，$12=3k(x+y)$，$4=k(x+y)$，$k=1,2$ となる。

①と同様に数えていくと，計 4 通り

$z=6$ のとき，$24=3k(x+y)$，$8=k(x+y)$，$k=1,2,4$ となる。

$k=1$ のとき，$x+y=8$，(x,y)は 5 通り（※）

$k=2$ のとき(x,y)は 3 通り，$k=4$ のとき(x,y)は 1 通り，計 9 通り

よって求める確率は，$\boldsymbol{\dfrac{13}{216}}$　※$(x,y)=(7,1),(1,7)$はアウト，サイコロです

（5）（5 点）

10%の食塩水 200 g には，塩が 20 g

$\downarrow\times\dfrac{x}{200}$　　x g には，塩が $\dfrac{x}{10}$ g

よって，1 回目の入替した食塩水 200 g には，塩が $\left(20-\dfrac{x}{10}\right)$ g

$\downarrow\times\dfrac{x}{200}$　x g には，塩が $\dfrac{x}{200}\left(20-\dfrac{x}{10}\right)$ g

よって，2 回目の入替した食塩水 200 g には，

塩が $\left(20-\dfrac{x}{10}\right)-\dfrac{x}{200}\left(20-\dfrac{x}{10}\right)=\left(1-\dfrac{x}{200}\right)\left(20-\dfrac{x}{10}\right)$

濃度が 3.6%なので，$\left(1-\dfrac{x}{200}\right)\left(20-\dfrac{x}{10}\right)=7.2$

$20-\dfrac{x}{5}+\dfrac{x^2}{2000}=7.2$，$x^2-400x+2000\times 12.8$，$(x-80)(x-320)=0$

$0<x<200$ より，$\boldsymbol{x=80}$

【コメント】

奈良県にあるハイパー難関校の問題です。

（1）は数 I か数 II の青チャートによく載っている問題ですね。本来高校生が解く問題ですが，高校入試の時点で知っておけよということでしょう。私は札幌の高校入学後，実力テストか定期テストで解いた記憶があります。

（2），地味に難しいです。どうやって解くのが速いのだろう？k=3 とすぐ思いつくかな？

（3）は，こんな高校受けるくらいなら，a(p+q)ぐらい知っているので余裕ですね。解答では一応公式導いています。

（4）も中々厳しい整数＆確率問題です。x+y の値とサイコロの関係は，何度も問題解いていれば，すぐ出るはず？

（5）は灘にも類題があります。最後は絶対因数分解できるだろうなと信じることが大事。https://hokkaimath.jp/blog-entry-317.html

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/