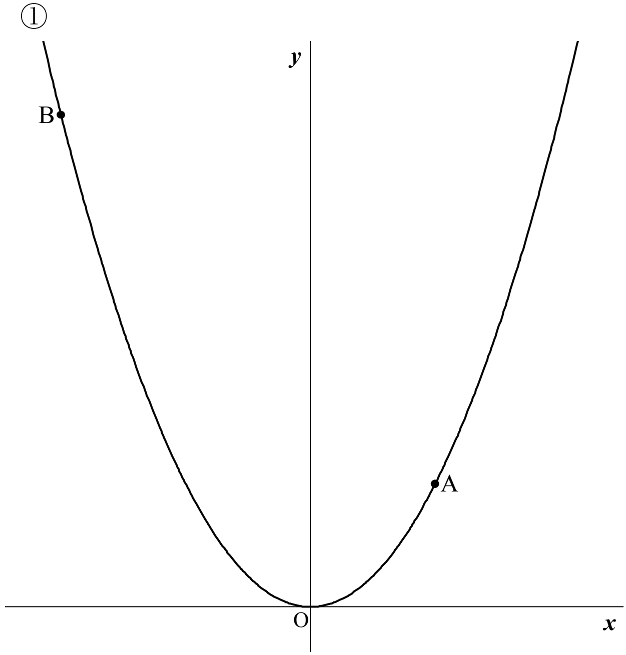
芸術的な高校入試第 13 回	
美しさ：★★★★★☆	難易度：？？？？？

出典：2018 年度　三重県

下の図のように，関数 $y=ax^2$…①（a は正の定数）のグラフ上に，2 点 A，B があり，点 A の座標が（2, 2），点 B の座標が（-4, p）である。点 O は原点とする。次の問いに答えなさい。



問 1　a，p の値を求めなさい。

問 2　関数①について，x の変域が $-1 \leqq x \leqq 3$ のときの y の変域を求めなさい。

問 3　x 軸上に点 C をとり，△ABC をつくる。△ABC の面積が△OAB の面積の $\dfrac{2}{3}$ 倍になるとき，点 C の座標を求めなさい。ただし，点 C の x 座標は点 A の x 座標より小さいものとする。

【解答例】

問 1（1 点×2）

A(2, 2)を通るから，$2 = 4a$　$\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$

よって，$p = \frac{1}{2} \times (-4)^2 = \mathbf{8}$

問 2（2 点）

最小値は x＝0 のとき，0

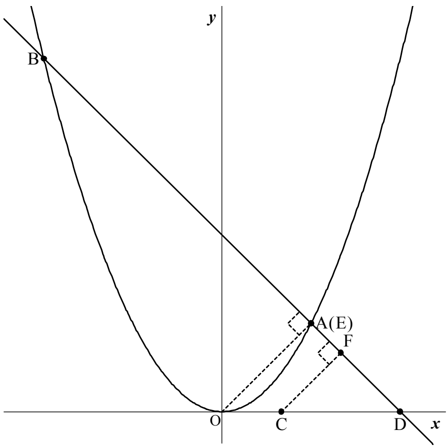
最大値は，$x = 3$ のとき，$\frac{9}{2}$　　$\boldsymbol{0 \leq y \leq \frac{9}{2}}$

問 3（2 点）

【解法 1】たぶん三重県が求めた解答①

直線 AB が$y = -x + 4$と表せるので，x 軸との交点は，D（4, 0）となる。
O，C から直線 AB に垂線を下ろし交点を E,F とする。
△OAB と△ABC は底辺共通なので，高さが $\frac{2}{3}$ 倍となり，また△DFC∽△DEO であるから，$\mathrm{DC}:\mathrm{DO} = \frac{2}{3}:1$，すなわち $\mathrm{DC}:\mathrm{CO} = 2:1$ となるから

C のx座標は，$4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$　$\mathbf{C\left(\frac{4}{3}, 0\right)}$



【解法 2】想定解答②？

直線 AB：$y = -x + 4$だから，

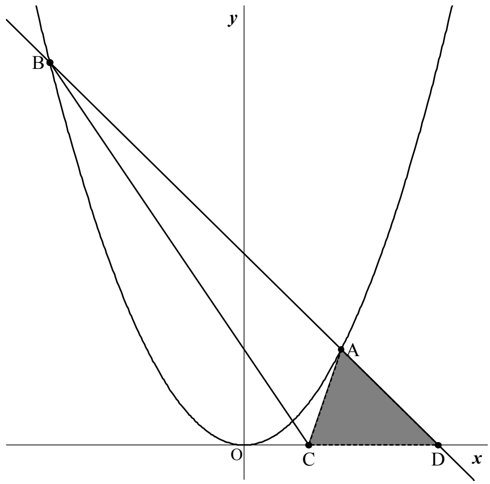
$\triangle \mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2} \times 4 \times (2 + 4) = 12$ より，

$\triangle \mathrm{ABC} = 12 \times \dfrac{2}{3} = 8$　となる。

直線 AB と x 軸との交点を D（4, 0）とし，C（t, 0）とする。△ABC＝△BCD－△ACD

$= \dfrac{1}{2} \times (4 - t) \times (8 - 2) = 3(4 - t) = 8$

これを解いて，$t = \dfrac{4}{3}$　　　　$\mathbf{C\left(\dfrac{4}{3}, 0\right)}$



【解法 3】たぶん三重が想定した解答③

C（t, 0）と置くと，AB 共通なので，O からの高さに比べて C からの高さの方が短くなるから，$0 \leqq t \leqq 2$ となる。直線 AB : $y=-x+4$ だから，C から y 軸に平行な直線を引き，直線 AB との交点を P（t, $-t+4$）と置く。

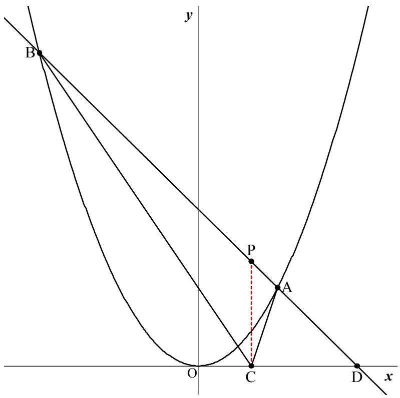
$\triangle \mathrm{OAB} = \frac{1}{2} \times 4 \times (2+4) = 12$ より，

$\triangle \mathrm{ABC} = 12 \times \frac{2}{3} = 8$　となるから，

$\triangle \mathrm{ABC} = \triangle \mathrm{APC} + \triangle \mathrm{BPC}$

$= \frac{1}{2} \times (-t+4) \times \{(2-t)+(4+t)\}$（※）

$= \frac{1}{2} \times (-t+4) \times 6 = 8$　これを解いて，$t = \frac{4}{3}$　$\mathbf{C}\left(\frac{4}{3}, 0\right)$



※$\triangle \mathrm{APC} + \triangle \mathrm{BPC}$

$= \frac{1}{2} \times (-t+4) \times (2-t) + \frac{1}{2} \times (-t+4) \times (4+t)$

$= \frac{1}{2} \times (-t+4) \times \{(2-t)+(4+t)\}$

と，因数分解できることを利用している。

底辺や高さが共通だと利用可能！

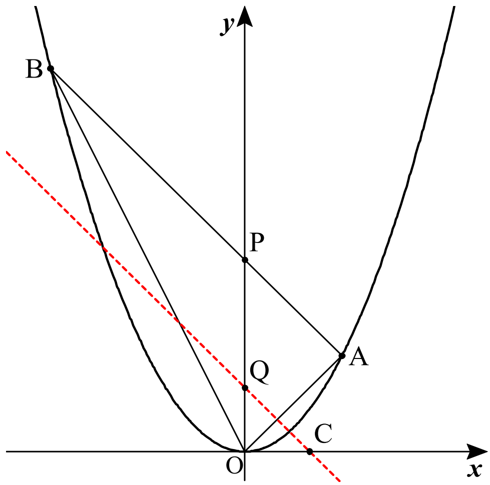
【解法 4】等積変形

直線 AB が$y=-x+4$と表せるので，切片を P（0, 4）とする。△ABC の面積は，△OAB の$\frac{2}{3}$倍なので，線分 OP 上に，PQ：PO＝2：3 となる点 Q をとると，△ABC＝△ABQ となる。

Q$\left(\frac{4}{3},0\right)$　点 Q から直線 AB に平行な直線を引くと，$\left(\text{等積変形から}\right)$

x 軸との交点が C となる。

CQ：$y=-x+\frac{4}{3}$であるから，$y=0$ を代入して，$\mathbf{C\left(\frac{4}{3},0\right)}$



【解法 5】高校入試では裏技（非推奨）

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}|2\times 8-2\times(-4)|=12$　より，

$\triangle\mathrm{ABC}=12\times\dfrac{2}{3}=8$

C（t, 0）と置き，A’（2－t, 2）B’（－4－t, 8）C’（0, 0）と置くと，

$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{A'B'C'}=\dfrac{1}{2}|8(2-t)-2(-4-t)|$

$=\dfrac{1}{2}|-6t+24|=|-3t+12|=8$

AB 共通なので，O からの高さに比べて C からの高さの方が短くなるから，$0\leqq t\leqq 2$ となる。したがって，

$-3t+12=8$　$t=\dfrac{4}{3}$　$\mathbf{C}\left(\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}},\mathbf{0}\right)$

※塾などで教わるかもしれない公式

3 点（0, 0），（a, b），（c, d）が作る三角形の面積は，

$$\frac{1}{2}|ad-bc|$$

※| |は絶対値にしろって記号。　|－2|＝2　|765|＝765

サラスの公式とか，クロスチョップとかそんな名前が付いています。一応中学数学範囲内で証明は可能。

【解法 6】変に知識蓄えている中学生用

$\mathrm{OA}=2\sqrt{2}$, $\mathrm{AB}=6\sqrt{2}$, $\mathrm{BO}=4\sqrt{5}$より，

$\mathrm{OA}^2+\mathrm{AB}^2=\mathrm{BO}^2$だから，$\mathrm{OA}\perp\mathrm{AB}$

したがって，直線 OA の式は，$y=x$ と表されるから，△ABC において，C から直線 AB に垂線を下ろし交点を F とすると，直線 CF は $y=x+b$ と表される。C $(t, 0)$ とすると，$0=t+b$　$b=-t$

$y=x-t$ と，AB : $y=-x+4$ との交点 F は，

$\mathrm{F}\left(\frac{4+t}{2}, \frac{12+t}{2}\right)$ と表される。$\mathrm{FC}=2\sqrt{2}\times\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$であるから，

$\left(2-\frac{t}{2}\right)^2+\left(2-\frac{t}{2}\right)^2=\frac{32}{9}$　$\left(2-\frac{t}{2}\right)^2=\frac{16}{9}$　$\left(2-\frac{t}{2}\right)=\pm\frac{4}{3}$　$t=\frac{16}{3}, \frac{4}{3}$

C の x 座標は A の x 座標より小さいので，

$\mathrm{C}\left(\frac{4}{3}, 0\right)$

※2直線$y=ax+b$と，$y=cx+d$が垂直に交わるとき，$ac=-1$

【コメント】

良い問題ですね。ただ，記述式では出題できません，部分点与えるのが面倒です。たぶん三重県は【解法 1】（または【解法 4】）で解くことを想定していると思われます。（それなら配点 2/50 点も納得。）思いつかないならいったん捨てて，時間余ったら，【解法 2】,【解法 3】で解くのが良いでしょう。この問題は記述式ではないので，そこまで無茶でもない。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/