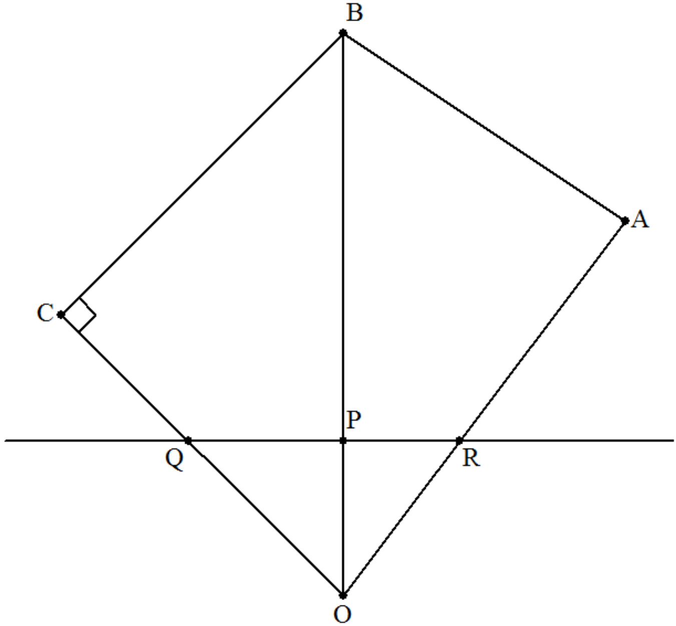
芸術的な高校入試第14回

出典：2006年度　岡山県	
難易度：★★★★☆☆	総試験時間：45分
美しさ：★★★★★☆	配点：20点/70点

下の図のように，OA＝10 cm，BC＝CO，∠BCO＝90°の四角形OABCがあり，対角線OBの長さは12 cmである。対角線OB上を動く点Pは，最初，点Oにあり，毎秒1 cmの速さで点Oから点Bまで動いて止まる。また，点Pを通り対角線OBに垂直な直線lが，辺OCまたは辺CBと交わる点をQ，辺OAまたは辺ABと交わる点をRとして，点Pが動き始めてx秒後の線分QRの長さをy cmとする。ただし，直線lが点Cや点Oを通るときも，それらの点で辺と交わると考える。また，$0 \leqq x \leqq 12$とし，$x=0$，$x=12$のときは$y=0$とする。

直線lは，点Pが動き始めて8秒後に点Aを通る。

このとき，次の①～④の空欄に適当な数または式を書き入れなさい。



① 辺 BC の長さは$\boxed{}$ cm である。

② $x=8$ のとき，y の値は$\boxed{}$である。

③ $6 \leqq x \leqq 8$ のとき，y を x の式で表すと，$y=$$\boxed{}$である。

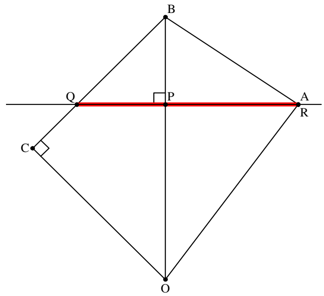
④ $y=7$ となる x の値は 2 つあり，その値は$\boxed{(ア)}$と$\boxed{(イ)}$である。

【解答例】

①（2 点）

△ OBC は直角二等辺三角形だから，$\mathrm{BC} = \dfrac{12}{\sqrt{2}} = \mathbf{6\sqrt{2}\ cm}$

②（2 点）



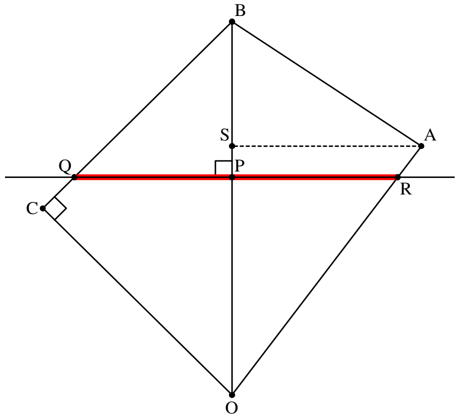
OP＝8 cm，OA＝10 cm より，

AP＝$\sqrt{100-64}$＝6 cm

BP＝4 cm で，△BPQ は直角二等辺三角形だから，QP＝4 cm　したがって，$\boldsymbol{y}$**＝10**

③（3 点）

【解答例 1】



x＝8 のときの P の位置を S とする。

△OAS∽△ORP だから，

AS：RP＝OS：OP なので，

$\mathrm{RP} = \dfrac{6 \times x}{8} = \dfrac{3}{4}x$

PB＝12－x cm だから，②より，PQ も 12－x cm

$y = \dfrac{3}{4}x + 12 - x = \mathbf{12 - \dfrac{1}{4}\boldsymbol{x}}$

【解答例 2】

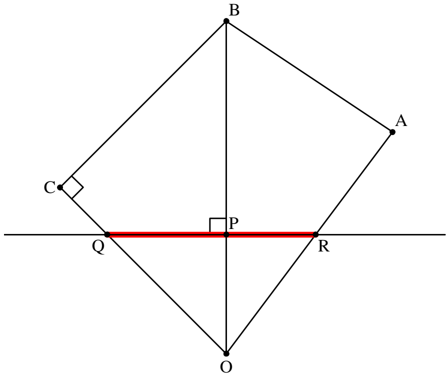
（記述式ではないので）y は x の 1 次関数と勝手に判断し，$y = ax + b$…①とする。x＝8 のとき y＝10，x＝6 のとき，PB＝6 cm

$\mathrm{RP} = \dfrac{6}{8} \times 6 = \dfrac{9}{2}$ cm　$y = \dfrac{21}{2}$ cm　これらの値を①に代入して連立方程式を

$y = \mathbf{12 - \dfrac{1}{4}\boldsymbol{x}}$　としても最終手段としてはあり。

④（2 点×2）

6≦x≦8 では，y=7 とはならない。



0≦x≦6 で，

$\mathrm{PQ} = x\ \mathrm{cm}$，$\mathrm{RP} = \dfrac{3}{4}x$だから，

$y = \dfrac{7}{4}x$　**$x = 4$**のとき，$y = 7$

8≦x≦12 のとき，

PQ＝12－x cm

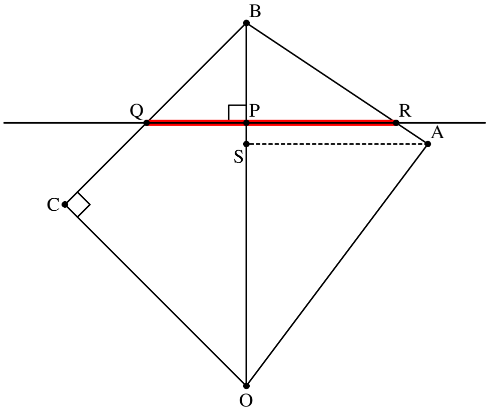
△RPB∽△ASB より，

RP：AS＝PB：SB

$\mathrm{RP} = \dfrac{6 \times (12 - x)}{4} = -\dfrac{3}{2}x + 18$

$y = 12 - x - \dfrac{3}{2}x + 18 = -\dfrac{5}{2}x + 30$

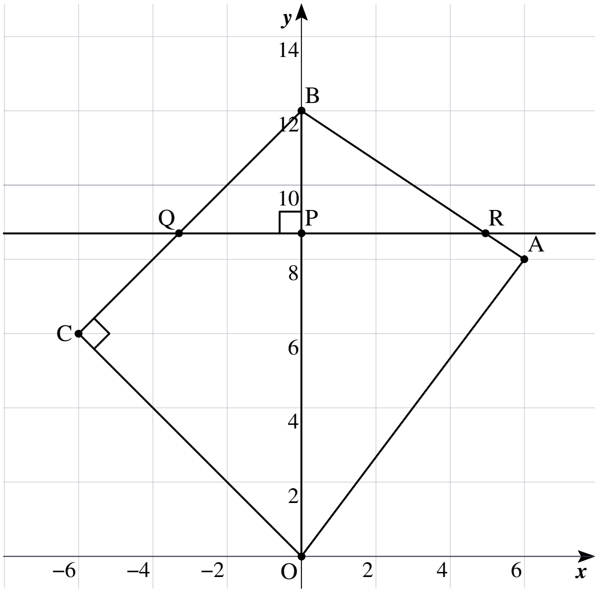
$-\dfrac{5}{2}x + 30 = 7$　　**$x = \dfrac{46}{5}$**



【コメント】

動点 P のかなり難しいバージョンです。分かっていても計算ミス多発する問題。

なお，次のことに気づくと，完全な関数の問題になります。



点 O を原点とすると，A（6, 8），B（0, 12），C（−6, 6）と置けます。点 P（0, p）とでも置くと，Q，R の座標も p で表せ，関数の問題として解けます。やる人いるかは不明です。

念のためやっておきましょう。

Q の座標は,

$0 \leqq x \leqq 6$ で，OC：$y = -x$ だから，$(-p, p)$

$6 \leqq x \leqq 12$ で，CB：$y = x + 12$ だから，$(p - 12, p)$

R の座標は,

$0 \leqq x \leqq 8$ で，OA: $y = \dfrac{4}{3}x$ だから，$\left(\dfrac{3}{4}p, p\right)$

$8 \leqq x \leqq 12$ で，AB: $y = -\dfrac{2}{3}x + 12$ だから，$\left(-\dfrac{3}{2}p + 18, p\right)$

すると，RQ の長さは，Q の x 座標は負であることに注意して，

$0 \leqq x \leqq 6$ で，

$$p + \frac{3}{4}p = \frac{5}{4}p = \boldsymbol{\frac{5}{4}x}$$

$6 \leqq x \leqq 8$ で，

$$12 - p + \frac{3}{4}p = 12 - \frac{1}{4}p = \boldsymbol{12 - \frac{1}{4}x}$$

$8 \leqq x \leqq 12$ で，

$$12 - p - \frac{3}{2}p + 18 = -\frac{5}{2}p + 30 = \boldsymbol{-\frac{5}{2}x + 30}$$

となり，簡単に求めることが出来る。良い問題ですね。