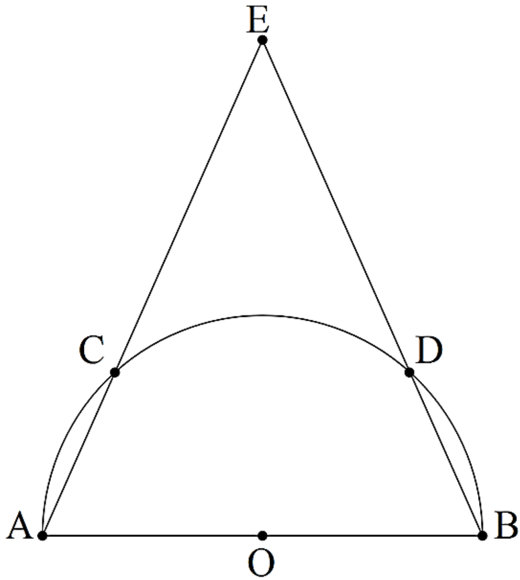
芸術的な高校入試第 20 回	
美しさ：？？？？？？	難易度：★★★★☆☆

出典：オリジナル

下の図のように，点 O を中心，線分 AB を直径とする半円があります。$\angle$AOC と$\angle$BOD が鋭角となるように，半円の弧上に点 C，D を取り，直線 AC と直線 BD との交点を E とします。

次の問いに答えなさい。



問 1　OA＝4 cm，CD＝6 cm のとき，△OCD の面積を求めなさい。

問 2　AB//CD のとき，△EAB が二等辺三角形であることを証明しなさい。

【解答解説】

問 1（3 点）

点 O から CD に垂線 OH を下ろす。

△OCD は二等辺三角形なので，

OC＝4 cm，CH＝3 cm より，OH＝$\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$ cm

$\triangle \mathrm{ABE}=\frac{1}{2}\times 6\times\sqrt{7}=\mathbf{3\sqrt{7}\ cm^2}$

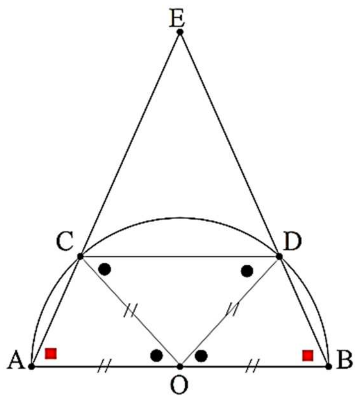
問 2（5 点）

【中 2 の解答】

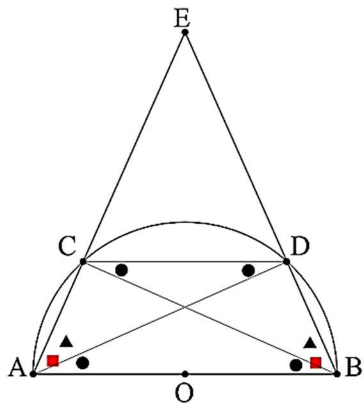
△OAC と△OBD において，仮定より，OA＝OC＝OD＝OB…①
①より，二等辺三角形の底角は等しいから，∠OCD＝∠ODC…②
CD//AB より平行線の錯角は等しいから，
∠OCD＝∠AOC…③　∠ODC＝∠BOD…④
②，③，④より，∠AOC＝∠BOD…⑤
①，⑤より 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，
△OAC≡△OBD…⑥
したがって，∠OAC＝∠OBD（∠EAB＝∠EBA）より，2 つの角が等しいから，△EAB は二等辺三角形…⑦

①，②，⑤，⑥，⑦→各 1 点

【解答例 1】



【解答例 2】



【中 3 の解答】

AB//CD より，平行線の錯角は等しいから，
∠BAD＝∠ADC，∠ABC＝∠BCD　…①
$\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$に対する円周角だから，
∠BAD＝∠BCD，∠ABC＝∠ADC　…②
①，②より，∠BAD＝∠ABC…③
$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$に対する円周角だから，∠CAD＝∠CBD…④
また，∠EAB＝∠BAD＋∠CAD　∠EBA＝∠ABC＋∠CBD
なので，∠EAB＝∠EBA となるから，2 つの角が等しいので，
△EAB は二等辺三角形…⑤

①，②，③，④，⑤→各 1 点

【最も一般的だが中学生には後述の理由で厳しい解答（高 1 の解法）】

AB//CD より，平行線の同位角は等しいから，
（∠EAB＝ECD，∠EBA＝∠EDC
∠ACD＝180°－∠ECD，∠BDC＝180°－∠EDC であるから,）
∠EAB＋∠ACD＝180°，∠EBA＋∠BDC＝180°
四角形 ABCD は円に内接するので，対角の和は 180°だから，
∠EAB＋∠BDC＝180°，∠EBA＋∠ACD＝180°
したがって，∠EAB＝∠EBA となるから，2 つの角が等しいので，
△EAB は二等辺三角形

【コメント】

中 2，中 3，高 1 で解法が異なる問題です。問 2 最後の解法は，北海道は大丈夫だと思いますが，都道府県で異なる採点基準によっては①「(　) 内を長々と書かなくてはならない。例：長野県」，②「内接四角形の対角の和 180°は中学では発展内容（実は高校範囲，数学 A)」なので，場合によってはハネられる可能性があります。たぶん北海道は大丈夫。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/