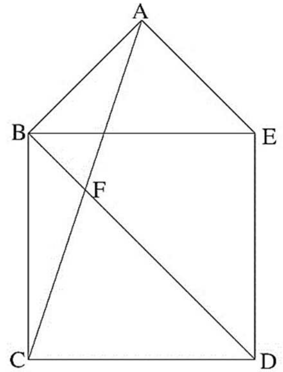
芸術的な高校入試第21回

出典：2020 年度　都立　立川高校	
難易度：★★★★☆☆	美しさ：★★★★★☆
総試験時間：50 分	配点：25 点/100 点

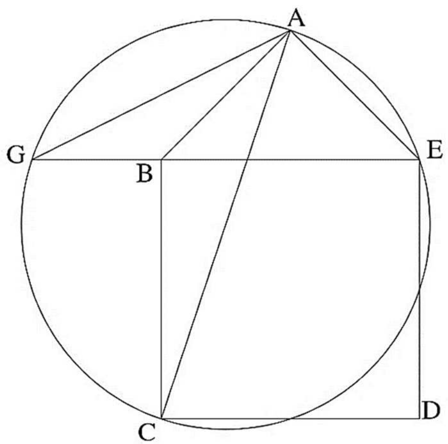
四角形 BCDE は，1 辺が 2 cm の正方形，△ABE は，AB＝AE＝$\sqrt{2}$ cm の直角二等辺三角形である。次の各問に答えよ。

問 1　線分 AC と線分 BD との交点を F とする。
　線分 BF の長さは何 cm か。

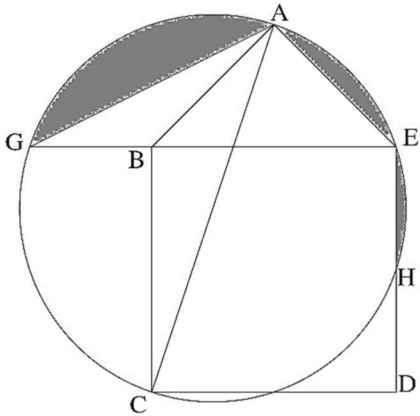


問 2　3 点 A，C，E を通る円をかき，線分 BE を B の方向に延ばした直線と円との交点を G とする。

（1）△ABC∽△GBA を証明せよ。



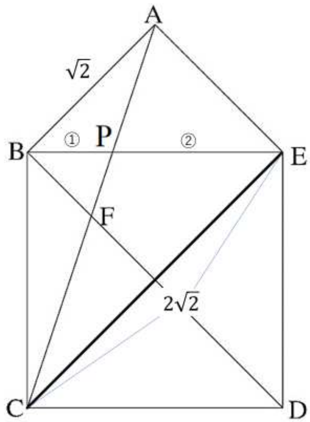
(2) 辺 ED と円の交点のうち, 点 E と異なる点を H とする。円周と弦 AG, 円周と弦 AE, 円周と弦 EH でそれぞれ囲まれた部分の面積の和は何 cm^2 か。



【解答例】

問１（7 点）

【解法 1】



AC と BE との交点を P とする。

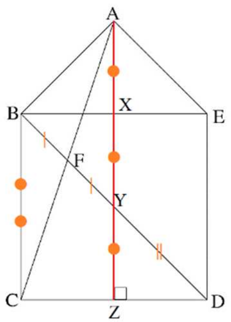
△ABP∽△CEP で，AB：CE＝1：2 だから，

BP：EP＝1：2

△AEP∽△FBP で，AE：FB＝2：1 となるので，

$\mathbf{BF = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ cm}$

【解法 2】



点 A から CD に垂線を下ろし，BE，BD，CD との交点をそれぞれ X, Y, Z とすると, Y は正方形 BCDE の対角線の交点なので，AX＝XY＝YZ となる。

△BCF≡△YAF（1 組の辺とその両端の角）となるから，BF＝FY，BY＝YD なので，

$\mathrm{BF} = \dfrac{1}{4}\mathrm{BD} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ cm}$

【解法 3】

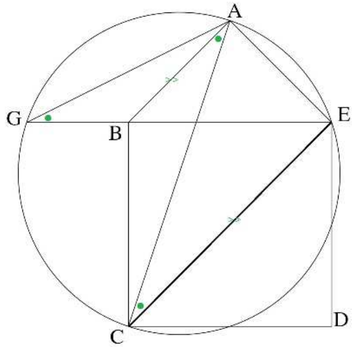
C（0, 0）とすると，D（2, 0）E（2, 2）B（0, 2）A（1, 3）と表される。

すると，F の座標は，

AC：$y = 3x$　BD：$y = -x + 2$　の交点だから，

$\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$　$\mathrm{BF} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ cm}$

問 2（11 点）



△ABC と△GBA において，

△ABE は直角二等辺三角形だから，∠ABE＝45°

よって，∠ABC＝45°＋90°＝135°，∠GBA＝180°－45°＝135°

であるから，∠ABC＝∠GBA…①

また∠AEC＝45°＋45°＝90°で，

∠BAE＝∠AEC＝90°となるから，同位角が等しくなるので，BA//CE

よって平行線の錯角は等しいから，∠BAC＝∠ACE

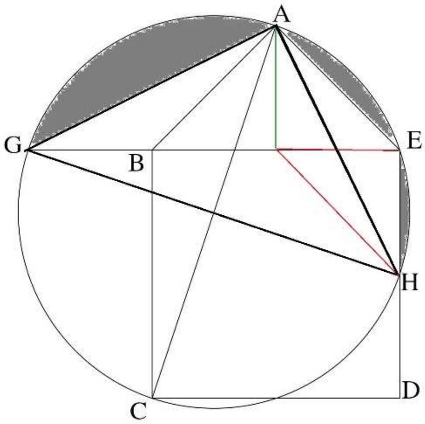
$\overset{\frown}{\mathrm{AE}}$ に対する円周角は等しいから，∠ACE＝∠BGA

したがって，∠BAC＝∠BGA…②

①，②より 2 組の角がそれぞれ等しいから

△ABC∽△GBA

問 3（7 点）



∠AEC＝∠GEH＝90° より, AC, GH は円の直径である。AC＝GH＝$\sqrt{10}$ cm なので，半円の面積は,

$$\frac{5}{4}\pi \text{ cm}^2 \ldots ①$$

△GAH は直角二等辺三角形（※）であるから，面積は,

$$\frac{5}{2} \text{ cm}^2 \ldots ②$$

A から GE に垂線を下ろし交点を I とすると, この AI と EH は平行なので,

△EHA＝△EHI（等積変形），△AEI＝△EHI で,

$\triangle \text{AEI} = \dfrac{1}{2}$ cm^{2}だから，$\triangle \text{EHA} = \dfrac{1}{2}$ cm^2 …③

したがって，求める面積は，①－（②＋③）

$$\boldsymbol{\left(\frac{5\pi}{4} - 3\right) \text{ cm}^2}$$

（※）四角形 AHCG の 4 つの角は全て 90° と分かり，また至る所に 45° が現れるので，四角形 AHCE は正方形と分かる。

【コメント】

45°，90°がたくさん現れる問題です。図はシンプルで，計算自体もシンプルですが，中々思考が難しい。

ちなみに高校数学を習った後なら，座標で全てワンパンできます。計算面倒だけど。問 1 は楽にできました。たぶん問 3 でも計算でごり押しできる。

実は円の中心は F になっています。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問

https://hokkaimath.jp/