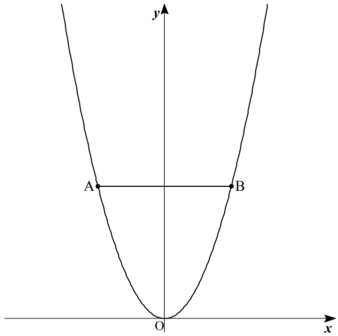
芸術的な高校入試第 22 回	
美しさ：★★★★☆☆	難易度：★★★★☆☆

出典：2020 年度　都立西高校

図 1 で，点 O は原点，曲線 f は関数 $y = ax^2$（$a>0$）のグラフである。

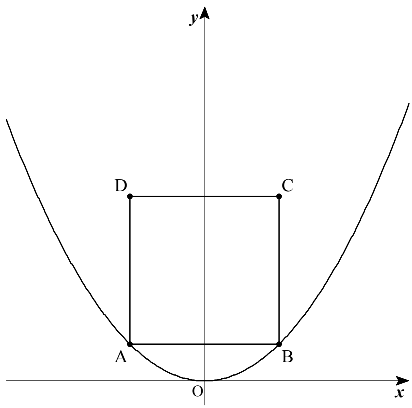
2 点 A，B はともに曲線 f 上にあり，点 A の x 座標は負の数，点 B の x 座標は正の数であり，点 A と点 B の x 座標の絶対値は等しい。点 A と点 B を結ぶ。点 O から点（1, 0）までの距離，および点 O から点（0, 1）までの距離をそれぞれ 1 cm として，次の各問に答えよ。

図 1



問 1　図 2 は, 図 1 において, $a = \frac{1}{2}$, 点 A の x 座標を -1 とし, 四角形 ABCD が正方形となるように y 座標はともに正の数となる点 C と点 D をとり，点 B と点 C，点 C と点 D，点 D と点 A をそれぞれ結んだ場合を表している。2 点 B，D を通る直線の式を求めよ。

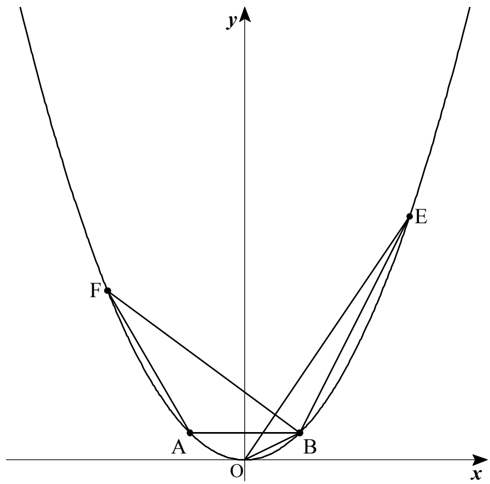
図 2



問 2　図 3 は，図 1 において，点 A の x 座標を-1とし，点 E は曲線 f 上にあり，x 座標が 3 となる点とし，点 F は曲線 f 上にあり，x 座標が負の数で，y 座標が点 A の y 座標より大きい点とし，点 O と点 B，点 B と点 E，点 E と点 O，点 B と点 F，点 F と点 A をそれぞれ結んだ場合を表している。

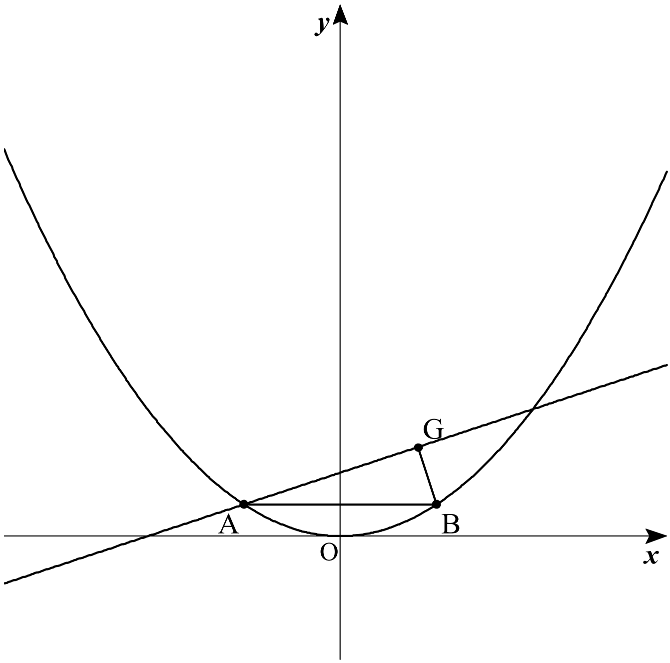
△BEO と△ABF の面積が等しくなるとき，点 F の x 座標を求めよ。ただし，答えだけでなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

図 3



問 3　右の図 4 は，図 1 において，点 A を通り，傾きが曲線 f の式における比例定数 a と等しい直線を l とし，点 B から直線 l に引いた垂線と直線 l との交点を G とし, 点 B と点 G を結んだ場合を表している。点 A の x 座標が $-\sqrt{7}$, △ABG の面積が 7 cm^2 のとき, a の値を求めよ。

図 4



【解答例】

問 1（7 点）

正方形の対角線なので，BD の傾きは−1

$B\left(1,\frac{1}{2}\right)$だから，求める式は,

$y-\dfrac{1}{2}=-(x-1)$　$\boldsymbol{y=-x+\dfrac{3}{2}}$

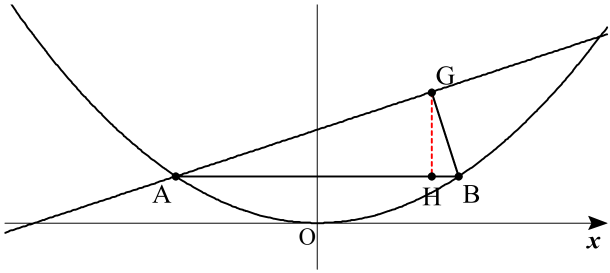
問 2（10 点）

$A(-1,a)$ $B(1,a)$ $E(3,9a)$と表せる。
直線 OB の傾きは，a となるから，点 E を通り直線 OB に平行な直線の式は，$y-9a=a(x-3)$　$y=ax+6a$
$G(0,6a)$とすると，△OBE＝△OBG（等積変形）だから，△OBE＝△OBG＝$\frac{1}{2}\times 6a\times 1=3a$
△ABF において，AB を底辺とした高さを h とすると,

$\dfrac{1}{2}\times 2\times h=3a$　$h=3a$

したがって，F の y 座標は$a+3a=4a$となる。
$y=ax^2$に代入し，$4a=ax^2$　$a\neq 0$，$x<0$ だから，$x=-2$
F の x 座標は**−2**

問 3（8 点）



G から AB に垂線を下ろし交点を H とする。

＜解法 1　一般的＞

AB＝$2\sqrt{7}$ cmで，AB を底辺としたとき，△ABG の高さは，$\sqrt{7}$ cmである。

AH＝t とすると，△AHG∽△GHB だから，

AH：GH＝HG：HB

$t:\sqrt{7}=\sqrt{7}:\left(2\sqrt{7}-t\right)$ これを解いて，$t=\sqrt{7}$

$a=\dfrac{\mathrm{GH}}{\mathrm{AH}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\mathbf{1}$

※∠G＝90°，AB：GH＝2：1 の時点で，△GAB が直角二等辺三角形と気づく人もいるらしい。気づいた瞬間，∠GAB＝45° と分かるので，傾き 1

＜その説明＞

AB＝$2x$, GH＝x, AH＝t と置くと, 先ほどと同様に△AHG∽△GHB だから,

$t:x=x:(2x-t)$　$x^2=-t^2+2tx$　$x^2-2tx+t^2=0$　$(x-t)^2=0$　$x=t$

となり, AH＝HB＝GH となるから, 直角二等辺三角形。知っておくと便利？

【コメント 1】

実は問 3 は，2012 年埼玉県高校入試で同じ問題が出題されています。首都圏だったら，解いたことあるかも？ちなみに，昔このサイト

https://hokkaimath.blog.fc2.com/blog-entry-34.html

で悪問認定しています

「曲線の比例定数 a と同じにする」問題を解く上ではどうでもいいことです。（問題を解く上で「同じ」という条件は一切使わない）

単に「直線の傾きを求めよ」で良い気がします。どうしてわざわざこんな文面を書いたのでしょうね。

【コメント 2】

都立西受験生なら，

傾き a で，点（p, q）を通る直線の式は，$$y-q=a(x-p)$$

というのは，当たり前に知っているのでしょうか……。

問 2 で当たり前のように使っています。知らなかったら，$y=ax+b$として，E（$3, 9a$）を代入し，b を a で表しましょう。そんなに難しくない。

【コメント 3】

問 3 適当に $a=1$ て書いて当たった受験生多そう。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/