

芸術的な高校入試第 23 回

美しさ：★★★★☆☆

難易度：★★★★★★

出典：2019 年度 都立西高校

図 1

図 1 で、点 O は原点、曲線 f は関数 $y=ax^2$ ($a>0$) のグラフを表している。2 点 P 、 Q は、ともに曲線 f 上にあり、点 R は x 軸上にある。点 P の x 座標を t 、点 Q の x 座標を $t+2$ 、点 R の x 座標を $t+1$ とする。次の各問に答えよ。

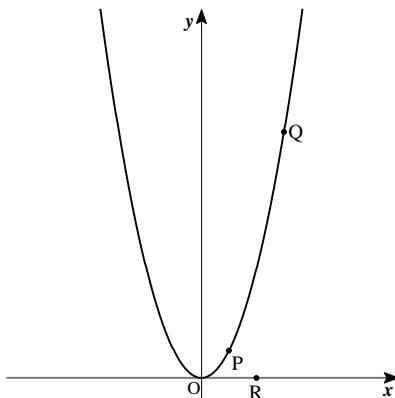
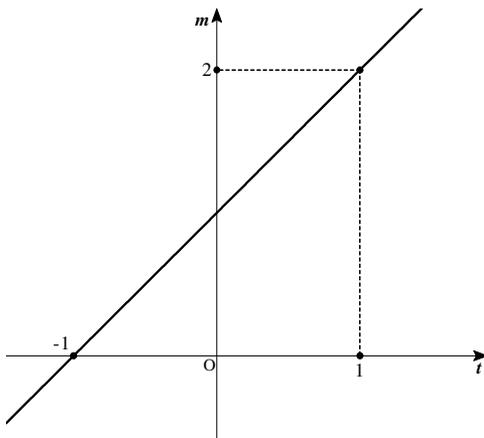


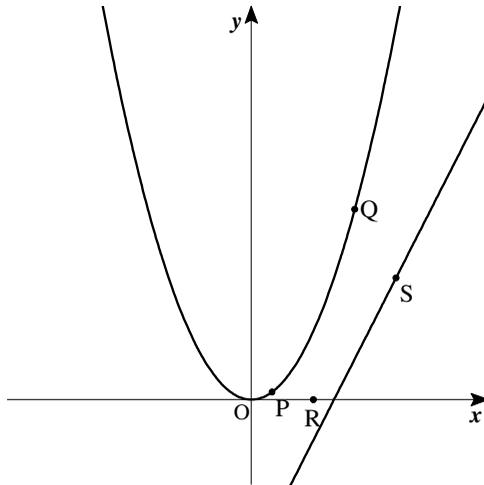
図 2

問 1 図 2 は、図 1 の曲線 f について、関数 $y=ax^2$ の x の値が点 P の x 座標 t から点 Q の x 座標 $t+2$ まで増加したときの変化の割合を m とし、 t と m の関係をグラフで表したものである。 a の値を求めよ。



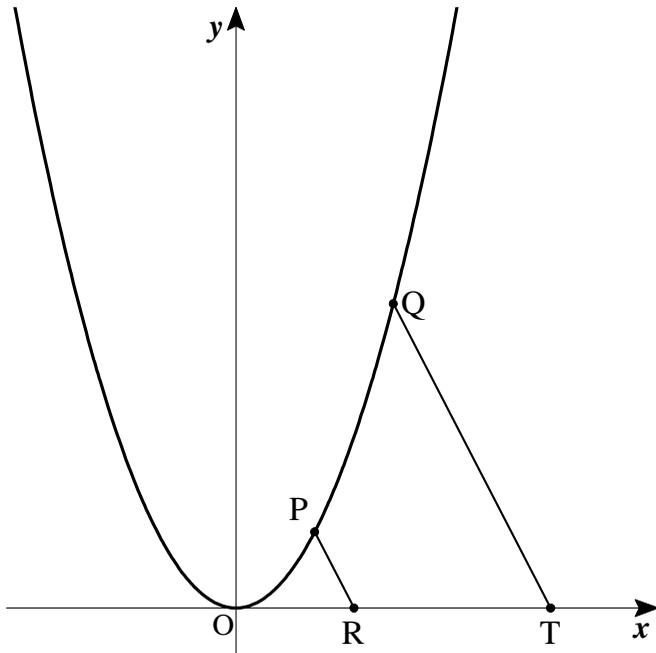
問2 図3は、図1において、点 $(2, 0)$ を通る直線を l とし、直線 l 上の点で x 座標が $t+3$ である点を S とした場合を表している。点 P が曲線 f 上を動くとき、四角形 $PRSQ$ が常に平行四辺形となるような直線 l の式を、 a を用いて表せ。

図3



問3 図4は、図1において、 $t=2$ のとき、点Pと点Rを結び、 $PR \parallel QT$ となるような点Tをx軸上にとり、点Qと点Tを結んだ場合を表している。直線 $y=x$ が、線分PRと交わり、台形PRTQの面積を2等分するとき、 a の値を求めよ。ただし、答えだけでなく、答えを求める過程が分かるように、途中の式や計算なども書け。

図4



【解答例】**問 1 (7 点)**

図 2 より、 $t=1$ のとき $m=2$ 、すなわち傾き 2 ということが分かる。 $t=1$ のとき、 $P(1, a)$ $Q(3, 9a)$ なので、傾きは、

$$\frac{8a}{2} = 4a = 2 \quad \text{これを解いて、} \quad a = \frac{1}{2}$$

問 2 (8 点)

四角形 PRSQ が平行四辺形となるには、 $QP \parallel SR$ 、ここで、 P と Q の x 座標の差 = S と R の x 座標の差であるから、 y 座標の差が等しくなれば良い。

$P(t, at^2)$, $Q(t+2, a(t+2)^2)$, $R(t+1, 0)$ と表す。

直線 l の傾きを b とすると、点 $(2, 0)$ を通るから、

$$l : y = bx - 2b \text{ と表せるので、} S(t+3, bt+b)$$

y 座標の差はそれぞれ、

$$PQ : a(t+2)^2 - at^2 = 4at + 4a = 4a(t+1)$$

$$RS : bt + b = b(t+1)$$

$$4a(t+1) = b(t+1) \quad \text{これを解いて (※1), } b = 4a$$

したがって、直線 l は、 $y = 4ax - 8a$

(※1) $t = -1$ とそうでないときで場合分けが本来は必要。 $t = -1$ のとき、

$P(-1, a)$ $Q(1, a)$ $R(0, 0)$ $S(2, 0)$ となるから、直線 l は任意となる。

問3 (10点)

P (2, 4a) R (3, 0) Q (4, 16a) と表す。

P, Q から x 軸に垂線を下ろし交点を U, V とすると, $\triangle PUR \sim \triangle QVT$, 相似比は $4a : 16a = 1 : 4$ だから, T の x 座標は $4 + 4 = 8$ となり, T (8, 0) 台形 PRTQ を二等分する直線は, PR の中点と QT の中点を結んだ線分の中点を通る。(※2)

PR の中点 $(\frac{5}{2}, 2a)$, QT の中点(6, 8a)

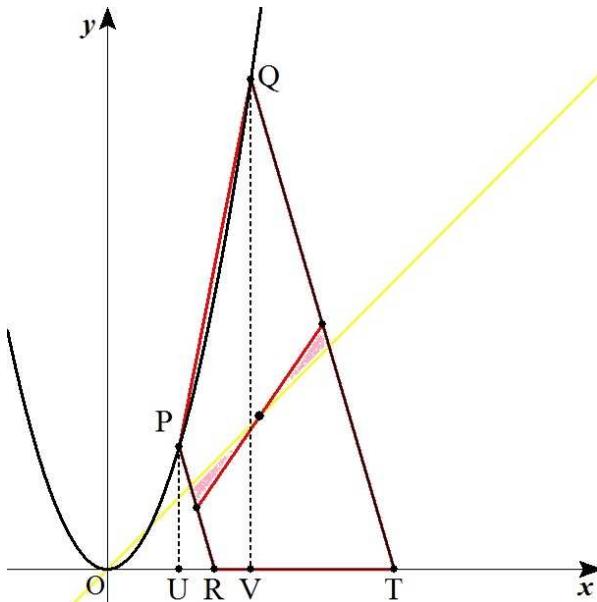
であるから, この2点の中点は,

$(\frac{17}{4}, 5a)$ と表せ, $y = x$ を通るから, $\frac{17}{4} = 5a$ $a = \frac{17}{20}$

(※2)

台形を2等分するには, 上底, 下底のそれぞれの中点を結んだ線分の中点を通ればよい。

下の図で黄色い線 $y = x$, 赤い線分と PR, QT で交わったピンクの三角形は合同となっている。



類題：平行四辺形を2等分

<https://hokkaimath.blog.fc2.com/blog-entry-65.html>

【コメント】

問1, 問3は(都立西の受験生にとっては)難しくないのですが, t やら m やらの文字で混乱して戦意喪失したでしょう。落ち着けばなんてことないのでがね。

問1は, グラフにされるから一見難しいですが, 聞かれていることは「 $t=1$ のとき, 直線 PQ の傾きは2です。 a の値は?」です。グラフを言語化できるか。

問3は, 平行四辺形や正方形2等分ならよく聞きますが, 台形はあまり聞かないかも。良い問題です。平行四辺形の導出の経験を活かせたら, 台形もすんなりいけるはず。ちなみに都立西の模範解答は長々と書いています。解答用紙に図を書いた方が楽ですね。回答としては左ので十分だと思われれます。

問2はもっと良い解法ある気がしますが.....力技で解きました。文字の力技で解くなら明らかに中学生には難しい。問3と交換してあげるべきだったかも.....。

ちなみにこの年は平均点がむごかったようで。4 割弱? 難易度調整に難があるので, 美しさは5のところ4に減らしておきました(だから何だって話ですが。)

【作成】

高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>