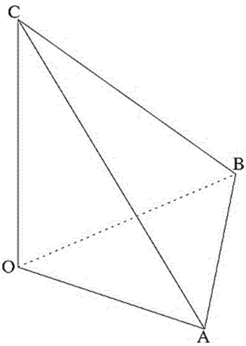
芸術的な高校入試第 24 回	
美しさ：★★★★★☆	難易度：★★★★★☆

出典：2020 年度　都立　日比谷高校

図 1 に示した立体 OABC は，OA⊥OB，OB⊥OC，OC⊥OA，OA＝OB＝6 cm，OC＝8 cm の四面体である。次の各問に答えよ。

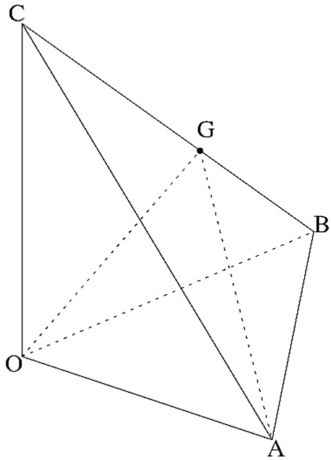
図 1



問 1　辺 AB の中点を D とし，頂点 C と点 D を結び，線分 CD の中点を E とし，点 E から平面 OAB に垂直な直線を引き，平面 OAB との交点を F とし，頂点 O と点 F を結んだ場合を考える。線分 OF の長さは何 cm か。

問 2　図 2 は，図 1 において，辺 BC 上にある点を点 G とし，頂点 O と点 G，頂点 A と点 G をそれぞれ結んだ場合を表している。△OAG の面積が最も小さくなる場合の面積は何 cm^2 か。ただし，答えだけでなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

図 2

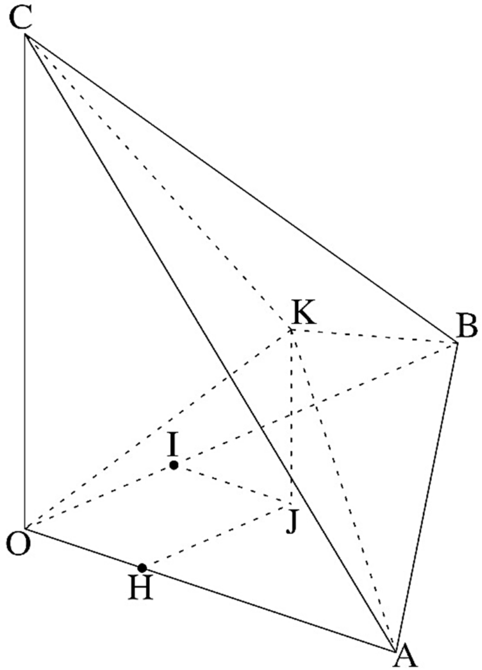


問 3　図 3 は，図 1 において，辺 OA 上にある点を H，辺 OB 上にある点を I とした場合を表している。

OH＝2 cm，OI＝$\dfrac{5}{2}$ cm のとき，点 H を通り，辺 OB に平行な直線と，点 I を通り辺 OA に平行な直線との交点を J とする。点 J を通り，辺 OC に平行な直線と平面 ABC との交点を K とし，点 K と頂点 O，点 K と頂点 A，点 K と頂点 B，点 K と頂点 C をそれぞれ結ぶ。

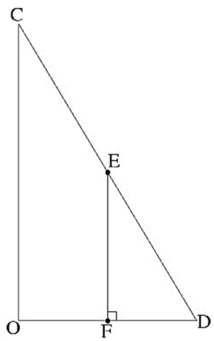
四面体 KOAB の体積を V cm^3, 四面体 KOAC の体積を W cm^3 とする。このとき，V : W を最も簡単な整数の比で表せ。

図 3



【解答例】

問１（７点）

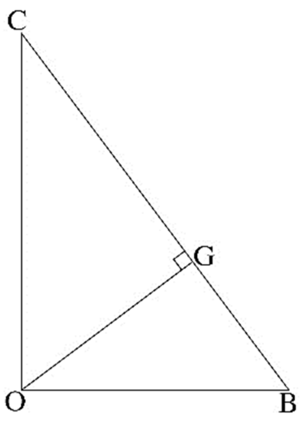


図より，点 F は点 E は線分 OD の中点である。OD＝$3\sqrt{2}$ cmなので，

$$OF = \frac{OD}{2} = \mathbf{\frac{3\sqrt{2}}{2}\ cm}$$

問２（１０点）

OA⊥OB，OA⊥OC より，OA⊥平面 OBC であるから，∠AOG＝90° となる。△OAG で底辺を OA とすると，OG が高さとなる。よって，OG が最小のとき，△OAG の面積も最小となる。



OG が最小のとき，OG⊥BC である。

$$\triangle OBC = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24\ cm^2$$

$BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm だから，

$24 = \frac{1}{2} \times 10 \times OG$ より，

$OG = \frac{24}{5}$ cm　$OA = 6$ cm だから，

$$\triangle AOG = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{24}{5} = \mathbf{\frac{72}{5}\ cm^2}$$

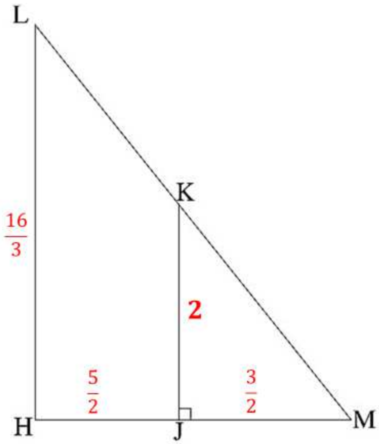
【作成】

高校入試　数学　良問・難問

https://hokkaimath.jp/

問３（８点）

四面体 KOAB において，底面を△OAB とすると，高さは KJ となる。



H から CA に垂直な直線引き交点 L，HJ を延長し，AB との交点を M とする。

（△COA∽△LHA，△COB∽△LHM を利用して）$\mathrm{LH} = \dfrac{16}{3}$ cm，$\mathrm{HM} = 4$ cm

$\mathrm{JM} = 4 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{3}{2}$ cm であるから，

△LHM∽△KJM より，LH : KJ＝HM : JM

$\dfrac{16}{3}$: KJ＝4 : $\dfrac{3}{2}$　KJ＝2 cm

よって，四面体 KOAB の体積は，$V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 6 \times 6 \times 2 = 12\ \mathrm{cm}^3$

四面体 KOAC は，△OAC を底面とすると，高さは JH となる。（K から平面 OAC に垂線を下ろすと，平行で長さ等しくなる）

よって，$W = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \dfrac{5}{2} = 20\ \mathrm{cm}^3$　$\boldsymbol{V} : \boldsymbol{W} = 12 : 20 = \mathbf{3 : 5}$

※問 1 と問 3 は，簡単な説明を省いている。

【コメント】

日比谷にしては計算が面倒臭くない立体図形問題です。「計算が面倒臭くない」＝「問題が簡単」というわけではありません。問 1〜3，閃きというか，発想力が試されます。そして受験では「まあこうだろうな」と信じて突き進む力も試されますね。（特に問 3，説明はやたら長いが，勘を信じれば素早く解ける）

日比谷の模範解答は，やたらと問 2 記述してありますね。相似の証明は不要な気がしますが「OA⊥OB，OA⊥OC より，OA⊥平面 OBC」だから∠AOG＝90°の説明は必須でしょう。

計算は短いですが「最初に何やっていいかわからない」沼にはまりそうな問題です。