

芸術的な高校入試第 31 回

美しさ：★★★★☆☆

難易度：★★★★☆☆

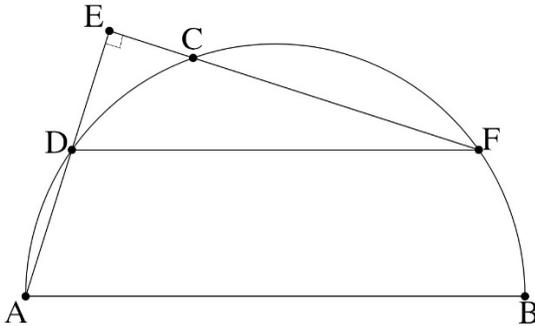
得点

/9

試験時間：50 分

出典：平成 23 年度 熊本県

下の図のように、線分 AB を直径とする半円があり、 \widehat{AB} 上に点 C を、 \widehat{AC} の長さが \widehat{CB} の長さより短くなるようにとる。また、 \widehat{AC} 上に点 D を、 $\widehat{AD} = \widehat{DC}$ となるようにとり、 C から直線 AD にひいた垂線と直線 AD との交点を E 、 EC の延長と \widehat{AB} との交点を F とする。このとき、次の各問いに答えなさい。



- (1) $DF \parallel AB$ であることを証明しなさい。
- (2) $AB = 6 \text{ cm}$, $AD = 2 \text{ cm}$ のとき、線分 EF の長さを求めなさい。ただし、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。

【解答例】

(1) (4点)

$\triangle ABD$ と $\triangle DFE$ において、

$\widehat{AD} = \widehat{DC}$ より円周角は等しいから、 $\angle ABD = \angle DFE \cdots \textcircled{1}$

仮定より、 $\angle DEF = 90^\circ$

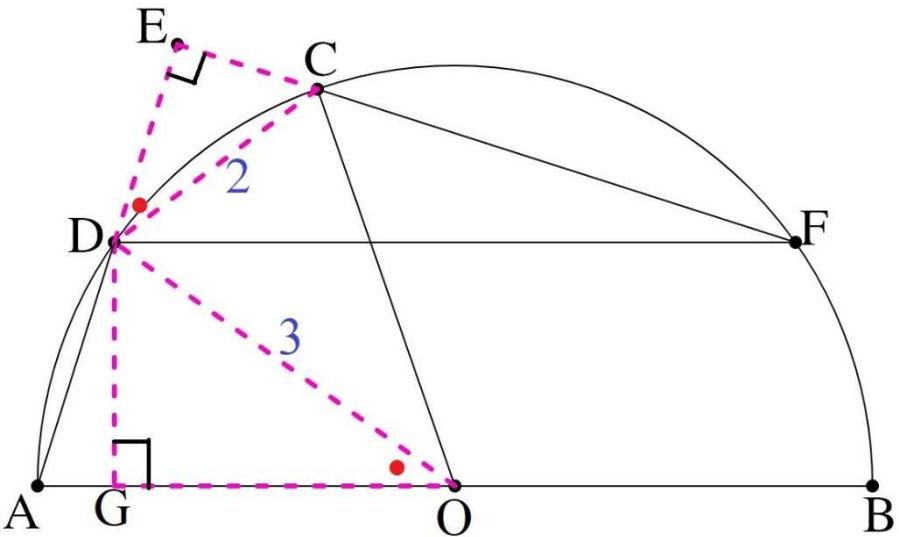
AB は直径なので、直径に対する円周角は 90° だから、

$\angle ADB = 90^\circ$ よって $\angle DEF = \angle ADB = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABD \sim \triangle DFE$

したがって、 $\angle BAD = \angle FDE$ となり、同位角が等しいから、 $DF \parallel AB$

(2) (2点)



半円の中心を O とすると、 $\triangle OAD \equiv \triangle ODC$ だから、 $DC = 2$

D から AO に垂線を下ろし交点を G とする。 $AG = x$ とすると、

$$4 - x^2 = 9 - (3 - x)^2 \quad 4 = 6x \quad x = \frac{2}{3}$$

すると DG は

$$DG = \sqrt{4 - \frac{4}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$\triangle ODG \sim \triangle DCE$ だから,

$$CE = \frac{4\sqrt{2}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{9} \quad DE = \sqrt{4 - \frac{128}{81}} = \sqrt{\frac{196}{81}} = \frac{14}{9}$$

$\triangle ABD$ において, $BD = \sqrt{36 - 4} = 4\sqrt{2}$

$\triangle ABD \sim \triangle DFE$ なので,

$$4\sqrt{2} : FE = 2 : \frac{14}{9} \quad \mathbf{FE = \frac{28\sqrt{2}}{9} \text{ cm}}$$

【コメント】

(1) の証明は別にたいしたことないのですが「平行を証明しなさい」とあんまり聞かれないことなので, これで結構な中学生は大混乱します。「 $\triangle ABD \sim \triangle DFE$ を証明しなさい」なら, 大抵の子出来ます, 不思議! 「ちょっと違う聞き方される」練習しておくとういことです。何事においても。

(2) は難しいです。シンプルな図, 条件から色々な知識が試されます。配点 2 点なので, 余程自信がある子以外は捨てとくのが吉でしょう。

【制作】

高校入試 数学 良問・難問

<https://hokkaimath.jp/>