

芸術的な高校入試第 32 回

美しさ：★★★★★★

難易度：★★★★★★

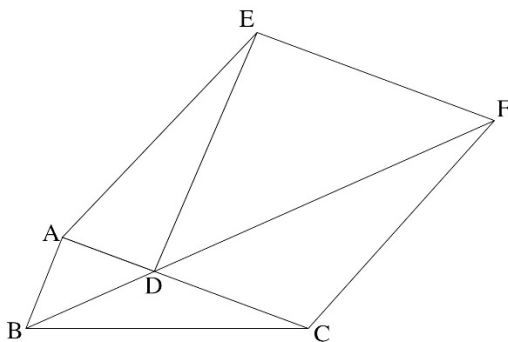
配点： 24 点/90 点

総試験時間：60 分

出典：2020 年度 大阪府 C

図 I, 図 II において, $\triangle ABC$ は内角 $\angle BAC$ が鈍角の三角形であり, $AB < AC$ である。 $\triangle DAE \equiv \triangle ABC$ であり, D は辺 AC 上にあって, E は直線 AC について B と反対側にある。このとき, $AB \parallel ED$ である。 B と D とを結ぶ。このとき, $\triangle ABD$ は $AB = AD$ の二等辺三角形である。 F は, E を通り辺 AC に平行な直線と直線 BD との交点である。 F と C とを結ぶ。次の問いに答えなさい。

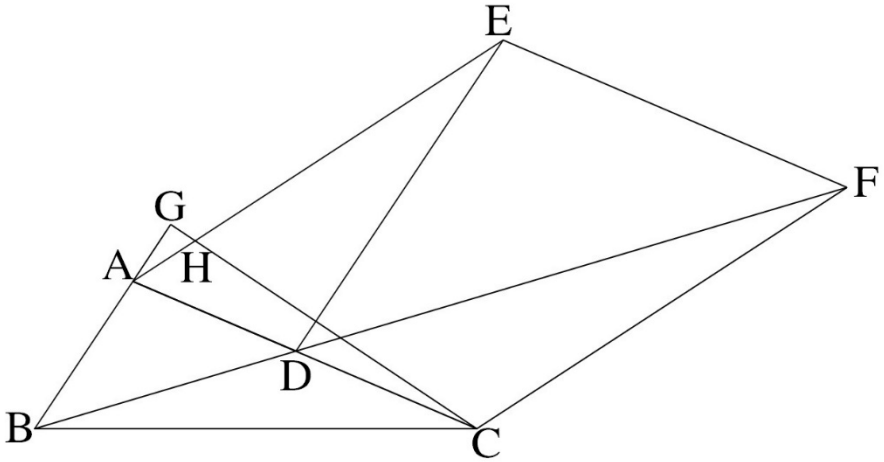
図 I



- (1) 図 I において, 四角形 EACF は平行四辺形であることを証明しなさい。

- (2) 図 II において、 $AB = 2 \text{ cm}$ 、 $AC = 6 \text{ cm}$ である。G は C から直線 AB にひいた垂線と直線 AB との交点であり、 $GA = 2 \text{ cm}$ である。H は、線分 GC と辺 EA との交点である。

図 II



- ① 辺 BC の長さを求めなさい。
- ② 線分 EH の長さを求めなさい。
- ③ 四角形 EHCF の面積を求めなさい。

【解答例】

(1) (8点)

二等辺三角形 ABD において、底角は等しいから、

$\angle ABD = \angle ADB = a$, $\angle BAD = b$ と置く。 ($2a + b = 180^\circ$)

対頂角は等しいから、 $\angle ADB = \angle CDF = a$

AB//ED なので、平行線の錯角は等しいから、 $\angle BAD = \angle ADE = b$

よって、 $\angle EDF = 180^\circ - a - b = a \cdots \textcircled{1}$ であり、また、EF//AC より平行線の錯角は等しいから、 $\angle CDF = \angle EFD = a \cdots \textcircled{2}$

①, ②より $\angle EDF = \angle EFD = a$ となり、底角が等しいので、 $\triangle EDF$ は二等辺三角形、ゆえに $ED = EF \cdots \textcircled{3}$

$\triangle DAE \equiv \triangle ABC$ より、 $ED = AC \cdots \textcircled{4}$

③, ④より、 $EF = AC$ これと EF//AC より、1組の対辺が平行で長さが等しいから、四角形 EACF は平行四辺形。

※大阪府が発表している模範解答は同位角で③をエレガントに導いている。それが普通。しかし同位角になるとなかなか見えない人いますよね、私です。

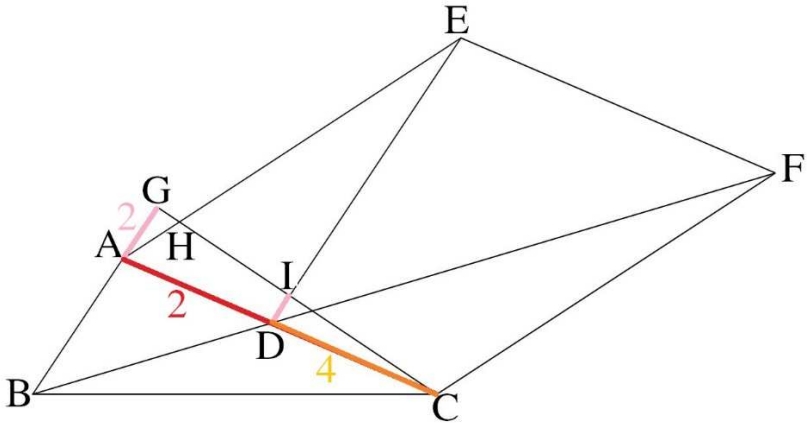
(2)

① (4点)

$\triangle ACG$ において、 $\angle G=90^\circ$ だから、 $GC = \sqrt{36-4} = 4\sqrt{2}$ cm

$\triangle BCG$ において、 $\angle G=90^\circ$ だから、 $BC = \sqrt{16+32} = 4\sqrt{3}$ cm

② (6点)



$\triangle DAE \equiv \triangle ABC$ だから、 $DE=6$ cm、 $AE=4\sqrt{3}$ cm

DE と CG との交点を I とする。 $\triangle CGA$ において、 $DI \parallel AG$ だから、

$$CA : CD = 3 : 2 \text{ より、} DI = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \text{ cm}$$

$$\text{したがって、} IE = 6 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3} \text{ cm}$$

$\triangle GAH \sim \triangle IEH$ で、 $AH : EH = 2 : \frac{14}{3} = 3 : 7$ であるから、

$$EH = \frac{7}{10} \times 4\sqrt{3} = \frac{14\sqrt{3}}{5} \text{ cm}$$

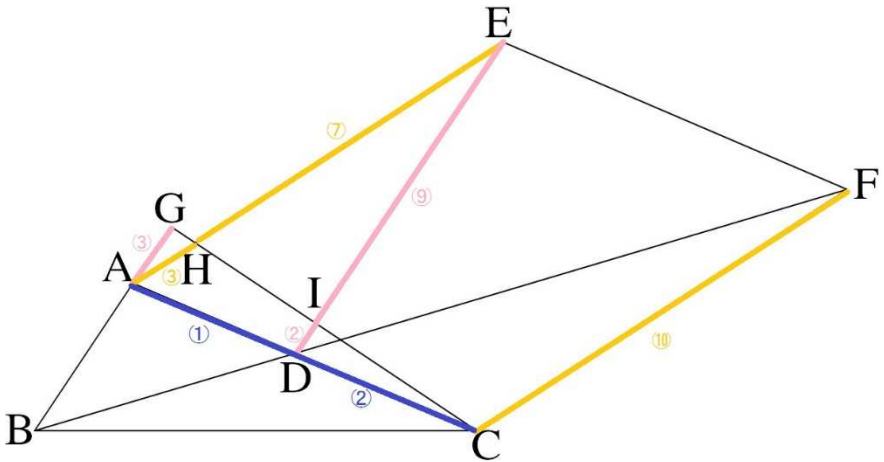
③ (6点)

$$\triangle CGA = \frac{1}{2} \times 2 \times 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}^2 \quad \text{より,} \quad \triangle CID = \frac{2^2}{3^2} \times 4\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{9} \text{ cm}^2$$

$$DI:DE = \frac{4}{3}:6 = 2:9 \text{ だから,} \quad \triangle CDE = \frac{9}{2} \times \frac{16\sqrt{2}}{9} = 8\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

$$CD:CA = 2:3 \text{ なので, 平行四辺形 EACF} = 8\sqrt{2} \times \frac{3}{2} \times 2 = 24\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

$$(\text{※})AE:EH = 10:7 \text{ なので, 四角形 EHCF} = 24\sqrt{2} \times \frac{17}{20} = \frac{102\sqrt{2}}{5} \text{ cm}^2$$



(※)台形 HCEF の面積は, $\frac{1}{2} \times (\text{⑩} + \text{⑦}) \times \text{高さ} = \frac{\text{⑰}}{2} \times \text{高さ}$

平行四辺形 EACF の面積は, $\text{⑩} \times \text{高さ}$ となるので,

面積比は, $\frac{\text{⑰}}{2} : \text{⑩} = \text{⑰} : \text{⑳} = 17 : 20$ となる。

【コメント】

難問ですが、計算は全く面倒でなく、補助線も引く必要がない、大変良い問題です。(ただ思いつくのは難しい、時間内に解ける人は凄すぎる！)

(1) は同位角用いるともっと早く証明できますが、思いつかなかったとき用に解答例書いておきます。大阪府と同じ解答例書いたってつまんないからね！

(2) は、まず①の、 $\triangle GBC$ が直角三角形と忘れないかが重要、結構見落としがち。②さえ解ければ、③は(計算ミス、勘違いしなければ)サービス問題です。②の平行線と線分の比($\triangle CGA$ における)を見つけられるかが勝負ですね。

【作成】

高校入試 数学 良問・難問

<https://hokkaimath.jp/>