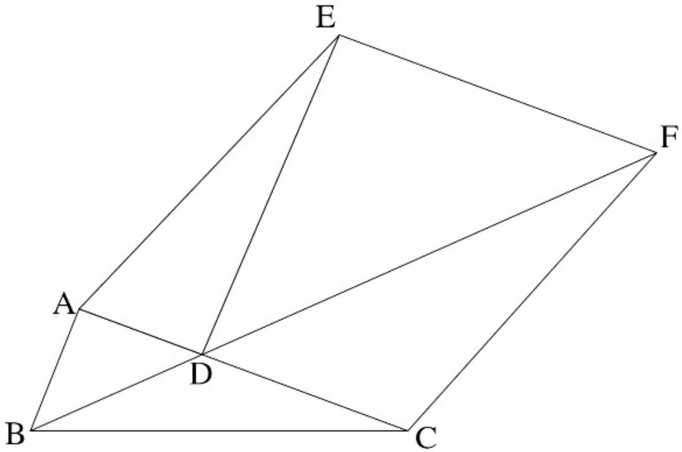
芸術的な高校入試第 32 回		
美しさ：★★★★★★★	難易度：★★★★★★★	配点：　　24 点/90 点
総試験時間：60 分	出典：2020 年度　大阪府 C	

図 I，図 II において，△ABC は内角∠BAC が鈍角の三角形であり，AB＜AC である。△DAE≡△ABC であり，D は辺 AC 上にあって，E は直線 AC について B と反対側にある。このとき，AB // ED である。B と D とを結ぶ。このとき，△ABD は AB＝AD の二等辺三角形である。F は，E を通り辺 AC に平行な直線と直線 BD との交点である。F と C とを結ぶ。 次の問いに答えなさい。

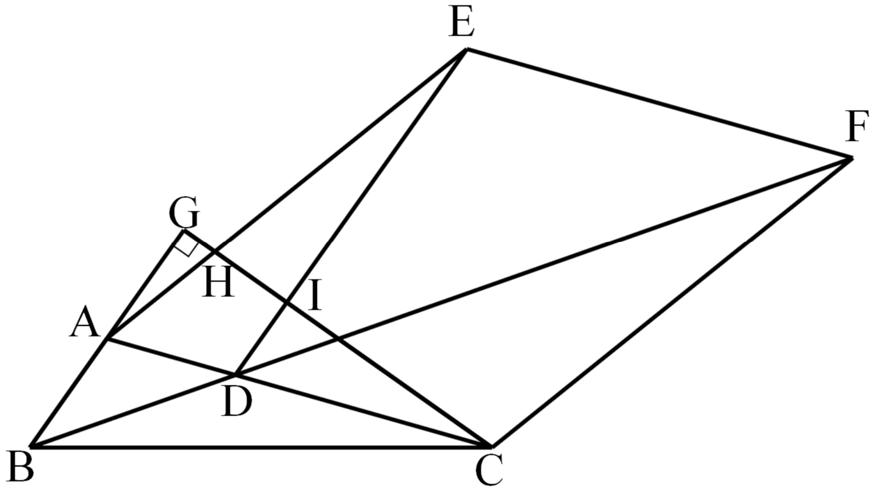
図 I



(1) 図 I において，四角形 EACF は平行四辺形であることを証明しなさい。

(2) 図 II において, AB＝2 cm, AC＝6 cm である。G は C から直線 AB にひいた垂線と直線 AB との交点であり，GA＝2 cm である。H は, 線分 GC と辺 EA との交点である。

図 II



① 辺 BC の長さを求めなさい。

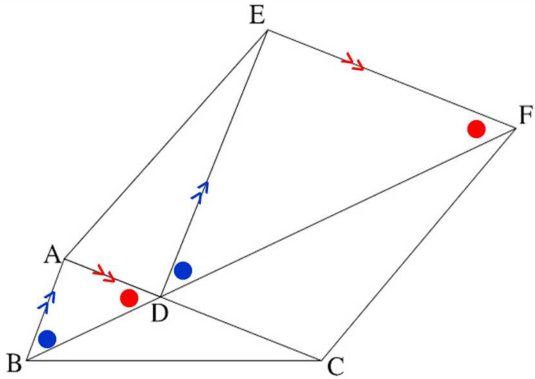
② 線分 EH の長さを求めなさい。

③ 四角形 EHCF の面積を求めなさい。

【解答例】

（1）（8 点）

仮定より，EF//AC……①，また平行線の同位角は等しいから，
∠EFD＝∠ADB……②
△ABD は AB＝AD の二等辺三角形なので，底角は等しいから，
∠ABD＝∠ADB……③
AB//ED より，平行線の同位角は等しいから
∠EDF＝∠ABD……④
②，③，④より，∠EDF＝∠EFD，よって△EDF は二等辺三角形だから，
EF＝ED……⑤
△ABC≡△DAE だから，CA＝ED……⑥
⑤，⑥より，EF＝CA……⑦
①，⑦より，1 組の対辺が平行でその長さが等しいから，四角形 EACF は平行四辺形である。



＜同位角が見づらい人用＞

二等辺三角形 ABD において，底角は等しいから，
∠ABD＝∠ADB＝a，∠BAD＝b と置く。（$2a+b=180°$ ）
対頂角は等しいから，∠ADB＝∠CDF＝a
AB//ED なので，平行線の錯角は等しいから，∠BAD＝∠ADE＝b
よって，∠EDF＝$180°-a-b=a$…①であり，また，EF//AC より平行線

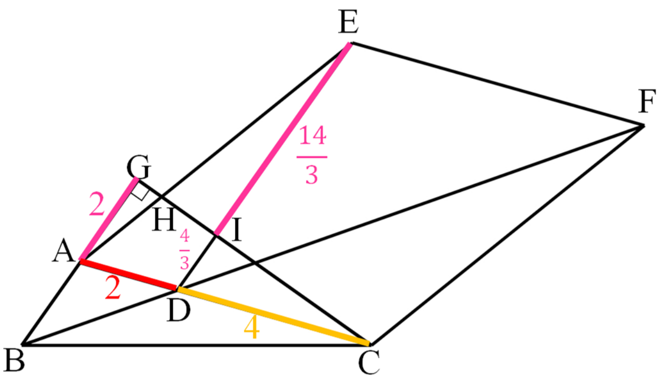
の錯角は等しいから，∠CDF＝∠EFD＝a…②
①，②より∠EDF＝∠EFD＝a となり，底角が等しいので，△EDF は二等辺三角形，ゆえに ED＝EF…③
△DAE≡△ABC より，ED＝AC…④
③，④より，EF＝AC　これと EF//AC より，1 組の対辺が平行で長さが等しいから，四角形 EACF は平行四辺形。

（2）

①（4 点）

△ACG において，∠G＝90°　だから，$GC=\sqrt{36-4}=4\sqrt{2}$ cm
△BCG において，∠G＝90°　だから，$BC=\sqrt{16+32}=\mathbf{4\sqrt{3}}$ **cm**

②（6 点）



△DAE≡△ABC だから，DE＝6 cm，AE＝$4\sqrt{3}$ cm
DE と CG との交点を I とする。△CGA において，DI//AG だから，

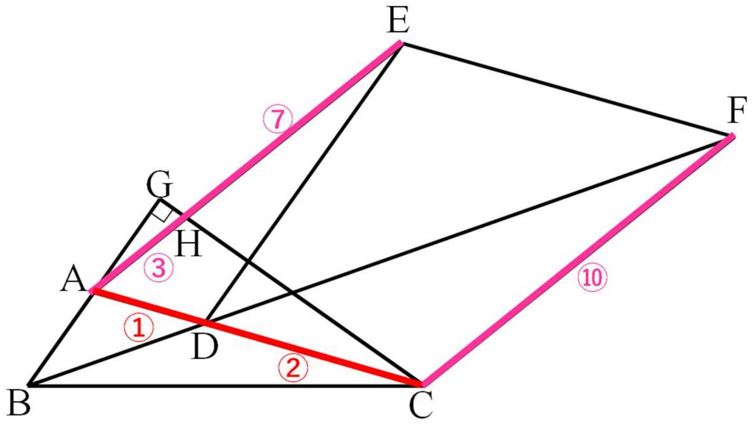
CA：$CD=3:2$ より，$DI=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ cm

したがって，$IE=6-\frac{4}{3}=\frac{14}{3}$ cm

△ GAH ∽△ IEH で，$AH:EH=2:\frac{14}{3}=3:7$ であるから，

$EH=\frac{7}{10}\times4\sqrt{3}=\mathbf{\frac{14\sqrt{3}}{5}}$ **cm**

③（6 点）



$\triangle \mathrm{CGA} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ より，$\triangle \mathrm{DAE} = \triangle \mathrm{ABC} = \triangle \mathrm{CGA} = 4\sqrt{2}$

よって，AD：DC＝1：2 だから，

$\triangle \mathrm{CAE} = 3\triangle \mathrm{DAE} = 12\sqrt{2}$，平行四辺形 EACF $= 24\sqrt{2}$

（HE＋CF）：（AE＋CF）＝17：20 だから，

四角形$\left(\text{台形}\right)$EHCF $= \frac{17}{20}$平行四辺形 EACF $= \boldsymbol{\frac{102\sqrt{2}}{5}}$ **cm²**

（※）

台形 HCEF の面積は，$\frac{1}{2} \times \left(⑩ + ⑦\right) \times$高さ$= \frac{⑰}{2} \times$高さ

平行四辺形 EACF の面積は，⑩×高さ　となるので，

面積比は，$\frac{⑰}{2}$：⑩＝⑰：⑳＝17：20 となる。

【コメント】

難問ですが，計算は全く面倒でなく，補助線も引く必要がない，大変良い問題です。(ただ思いつくのは難しい，時間内に解ける人は凄すぎる！)

(1) は同位角用いるともっと早く証明できますが，思いつかなかったとき用に解答例書いておきます。大阪府と同じ解答例書いたってつまんないからね！

(2) は，まず①の，△GBC が直角三角形と忘れないかが重要，結構見落としがち。②さえ解ければ，③は（計算ミス，勘違いしなければ）サービス問題です。②の平行線と線分の比（△CGA における）を見つけられるかが勝負ですね。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/