芸術的な高校入試第 33 回		
美しさ：★★★★☆☆	難易度：★★★★☆☆	得点　　5 点/60 点
試験時間：45 分	出典：平成 31 年度　沖縄県	

図 1 は，1 辺の長さが 6 cm の正八面体である。このとき，次の各問いに答えなさい。

問 1　図 2 は図 1 の立体の展開図である。図 2 の点アに対応する頂点を図 1 の A～F から 1 つ選び，記号で答えなさい。

問 2　図 1 の立体における線分 AF の長さを求めなさい。

問 3　図 3 のように，図 1 の立体の内部ですべての面に接している球がある。この球の体積を求めなさい。

図 1

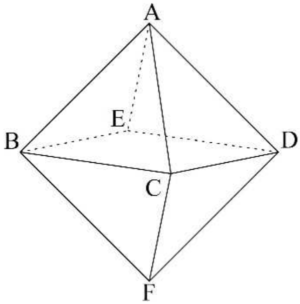


図 2

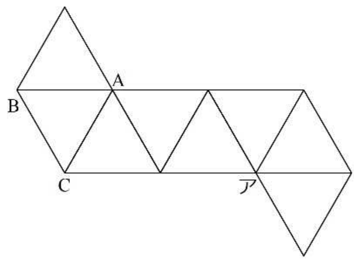
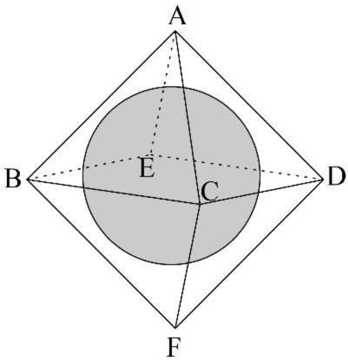
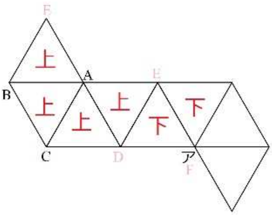


図 3



【解答例】

問 1（1 点）



1 個 1 個の頂点がどこにあたるか記す。

アがあるのは△DEF なので，**F**

問 2（2 点）

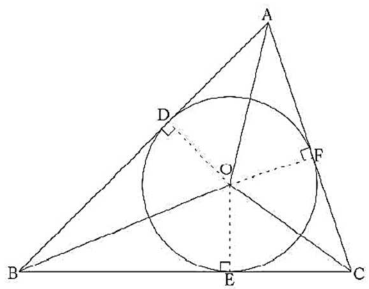
線分 AF は，正方形 BCDE の対角線の交点（真ん中）を通る。したがって，この点を G とすると，$BG = 3\sqrt{2}$，$AB = 6$ cm なので，

$AG = \sqrt{36-18} = 3\sqrt{2}$ cm，よって，$\mathbf{AF = 6\sqrt{2}}$ **cm**

問 3（2 点）

<u>**Point**</u> こういう問題を思い出す

下の図のように，円 O が△ABC に内接（内側で接）している。AB＝6，BC＝7，CA＝5，$\triangle ABC = 6\sqrt{6}$であるとき，円 O の半径を求めなさい。



円の接線と半径は垂直に交わるのでした。したがって，△ABC の面積は，半径を r とすると，

$\triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$

$= \frac{1}{2} \times 6r + \frac{1}{2} \times 7r + \frac{1}{2} \times 5r = \frac{1}{2}(18r) = 9r = 6\sqrt{6}$

$\boldsymbol{r = \frac{2}{3}\sqrt{6}}$ となります。

球が接している場合にも同じことが言える。球の半径を r とする。

正八面体 ABCDEF の体積は，$2\times\dfrac{1}{3}\times 6^2\times 3\sqrt{2}=72\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^3$

また，この体積は次のようにも求められる。

正八面体 ABCDEF

= 四面体 ABCG + 四面体 ACDG + 四面体 ADEG + 四面体 AEBG

+四面体 FBCG + 四面体 FCDG + 四面体 FDEG + 四面体 FEBG

$=8\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}\times r=24\sqrt{3}\,r\ \mathrm{cm}^3$

$72\sqrt{2}=24\sqrt{3}r$　これを解いて，$r=\sqrt{6}$

よって球の体積は，$\dfrac{4\pi r^3}{3}=\dfrac{4\pi\times 6\sqrt{6}}{3}=\mathbf{8\sqrt{6}\pi\ cm^3}$

【コメント】

　球，円に接している場合の考え方は絶対に覚えておかなくてはなりません。

【制作】

高校入試　数学　良問・難問

https://hokkaimath.jp/