

芸術的な高校入試第 34 回

美しさ：★★★★☆☆

難易度：★★★★☆☆

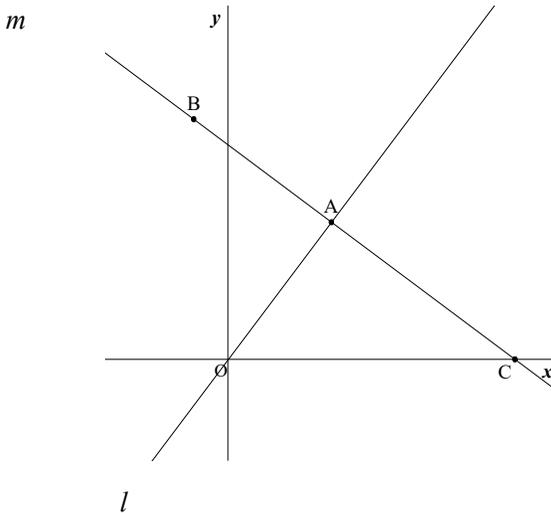
得点

???

試験時間：???

出典：平成 26 年度 宮崎県

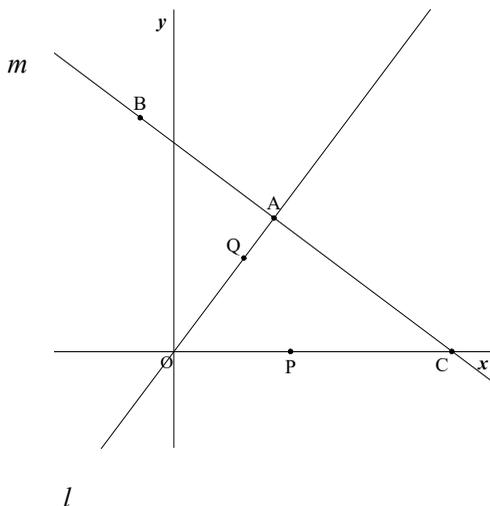
図 I のように、2 つの直線 l 、 m がある。直線 l は原点 O を通り、直線 m と点 A で垂直に交わっている。直線 m は点 B を通り、 x 軸と点 C で交わっている。また、2 点 A 、 B の座標は、それぞれ $(3, 4)$ 、 $(-1, 7)$ である。このとき、次の 1~3 の問いに答えなさい。



問 1 直線 l の式を求めなさい。

問 2 点 C の x 座標を求めなさい。

問3 図IIのように、図Iの $\triangle OCA$ の周上を動く2点P, Qがある。2点とも、原点Oを同時に出発し、毎秒1cmの速さで、 $\triangle OCA$ の周上を1周する。点Pは、原点Oから点C, Aを通って原点Oまで移動し、点Qは、原点Oから点A, Cを通って原点Oまで移動する。このとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。ただし、座標軸の単位の長さは1cmとする。



- (1) 2点P, Qが重なり合う点をDとする。このとき、点Dの座標を求めなさい。
- (2) 点Pが点Aを通り過ぎ、点Qが点Cを通り過ぎた後、 $\triangle OQP$ の面積が $\frac{5}{2}\text{cm}^2$ となった。このとき、直線PQの式を求めなさい。

問 1

直線 l は原点 O を通り、点 A を通るから、 $A(3,4)$ なので、

$$4 = 3a \quad a = \frac{4}{3} \quad l : y = \frac{4}{3}x$$

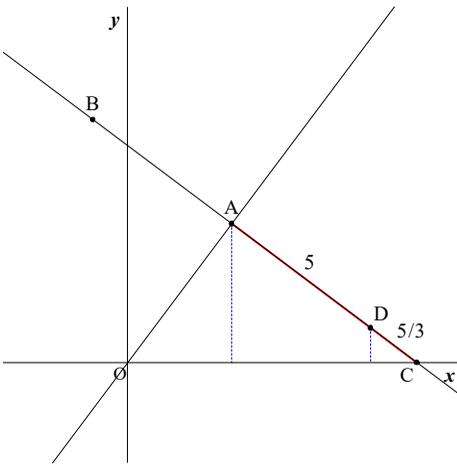
問 2

直線 m は傾き $\frac{4-7}{3-(-1)} = -\frac{3}{4}$ 、点 A を通るから $y-4 = -\frac{3}{4}(x-3)$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad \text{直線 } m \text{ において、} y=0 \text{ とすると、} x = \frac{25}{3}$$

問 3 (1)

(解答例 1)



$\triangle OAC$ の周上の長さは、

$$OA = \sqrt{9+16} = 5,$$

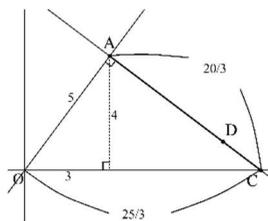
$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{\left(\frac{25}{3}-3\right)^2 + 16} \\ &= \sqrt{\frac{256}{9} + 16} = \sqrt{\frac{400}{9}} = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

$$OC = \frac{25}{3} \quad \text{なので、}$$

$$5 + \frac{20}{3} + \frac{25}{3} = 20 \quad \text{となる。}$$

よって、 $OA+AD=10$ cm だから、 $AD=5$ cm。 $AC : DC=4 : 1$ なので、

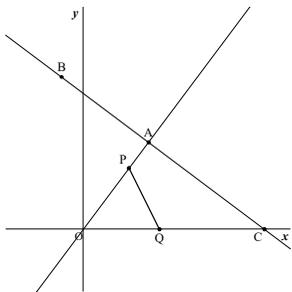
$$D \text{ の } y \text{ 座標は、} 4 \times \frac{1}{4} = 1 \quad \text{これを } y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \text{ に代入し、} x = 7 \quad \mathbf{D(7,1)}$$



(※) AC の長さを求める際に、 $\angle A=90^\circ$ を用いれば、相似な三角形で、

$$AC : 5 = 4 : 3 \quad AC = \frac{20}{3} \quad \text{と楽に求められる。}$$

問3 (2)



点 P も点 Q も、同じ長さ進んでいるので、 $\triangle OPQ$ は二等辺三角形となる。(同じ時刻に点 P も点 Q も点 O に到着する)。

OQ の長さを t とすると、OP の長さも t 。底辺を

OQ とすると、高さは $\frac{4}{5}t$ となる。

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5}t^2 = \frac{2}{5}t^2 = \frac{5}{2} \quad t > 0 \text{ より, } t = \frac{5}{2}$$

すると、 $Q\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 、 $P\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ となるから、**PQ : $y = -2x + 5$**

【コメント】

問1は「~~2直線が垂直に交わるとき、傾きの積は-1~~」を知らないと厳しい問題なので、少し気に食わないです。宮崎県の中学校では当たり前を教えているのか？（一応、中学の三平方の定理で証明はできるので、ルール違反ではない、でも問1で出さなくても……。）

とか上記で偉そうなこと書いていましたが、ご覧の通り、原点と点 A ですぐ出せる中 1 レベルの問題です（メールフォームでのご指摘ありがとうございます）。問題文はよく読みましょう！

そうすると、垂直 90° は何のために与えられたのか？という話です。問3 (1) で若干計算楽になりますが、正直無くても良いです。消し忘れ？

好きなのは問3 (2)。難しく長々と問題文書いてありますが、結局太字下線部です。

【制作】

高校入試 数学 良問・難問

<https://hokkaimath.jp/>