

芸術的な高校入試第 37 回

美しさ：★★★★☆

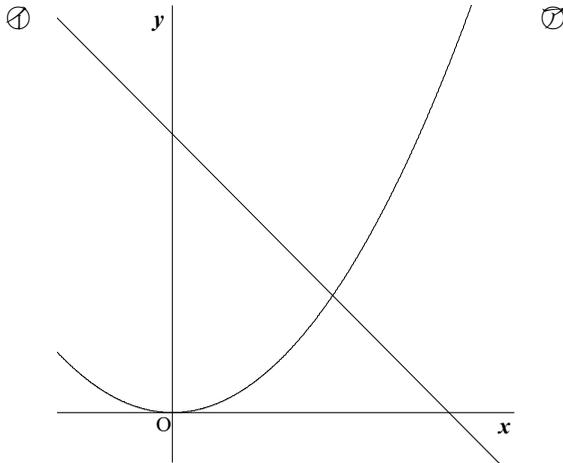
難易度：★★★★☆

得点 15 点/100 点

試験時間：60 分

出典：平成 30 年度 秋田県

次の図において、㉞は関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ 、㉟は関数 $y = -x + b$ のグラフである。
次の (1)、(2) の問いに答えなさい。



(1) ㉞上に x 座標が 3 である点 A をとる。㉟が点 A を通る直線であるとき、 b の値を求めなさい。求める過程も書きなさい。

(2) 大小 2 つのさいころを同時に 1 回投げたとき、大きいさいころの出た目の数を m 、小さいさいころの出た目の数を n とし、2 つのさいころを投げたときにできる点の座標を (m, n) とする。ただし、さいころのどの目が出ることも同様に確からしいものとする。

① ④において、 $b=6$ のとき、点 (m, n) が、 y 軸と⑦、④の $x \geq 0$ の部分で囲まれた図形の内部にある確率を求めなさい。ただし、 y 軸と⑦、④の $x \geq 0$ の部分で囲まれた図形の周上の点も内部に含まれるものとする。

② 点 (m, n) が、 y 軸と⑦、④の $x \geq 0$ の部分で囲まれた図形の内部にある確率が $\frac{1}{2}$ であるとき、 b のとりうる値の範囲を求めなさい。ただし、 y 軸と⑦、④の $x \geq 0$ の部分で囲まれた図形の周上の点も内部に含まれるものとする。

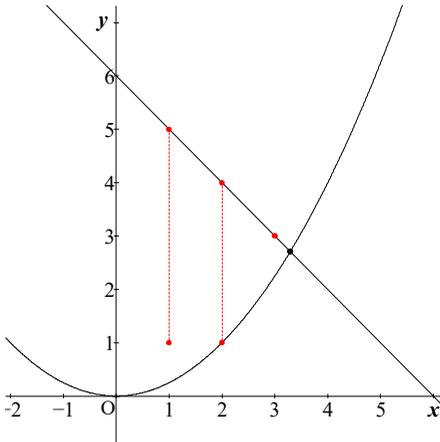
【解答例】

(1) (5点)

㉞に $x=3$ を代入して、A $(3, \frac{9}{4})$ この座標を、㉟に代入して、

$$\frac{9}{4} = -3 + b \quad b = \frac{9}{4} + 3 = \frac{21}{4}$$

(2) ① (5点)



$b=6$ のとき㉞と㉟との交点の座標は

$$\frac{1}{4}x^2 = -x + 6 \quad x^2 + 4x - 24 = 0$$

$$x > 0 \text{ より } x = -2 + 2\sqrt{7}$$

3以上である。

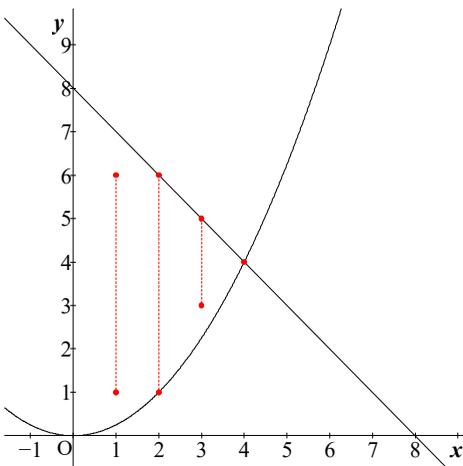
x 座標が 1 の内部の点は、 y 座標が 5
~1 の 5 個。このようにまとめると、

x 座標	1	2	3
個数	5	4	1

となり、合計 10 個だから、求める確率は、

$$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

・ $b=8$ のときのグラフ



(2) ② (5点)

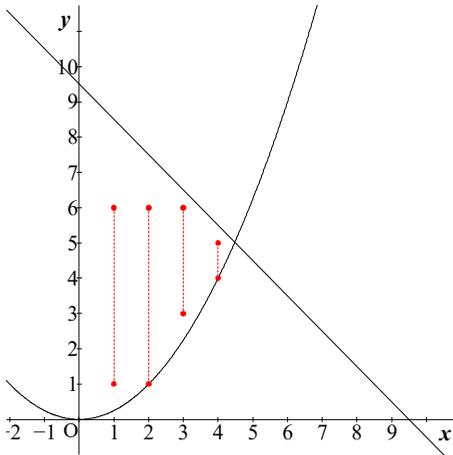
㉞に $x=4$ を代入すると $(4, 4)$ これは、 $b=8$ のときの、㉞と㉟との交点の座標である。

$< b=8$ のときの内部の点

x 座標	1	2	3	4
個数	6	6	3	1

と合計 16 個となる。

$b=9$ なんぼぐらいのときのグラフ



< $b=9$ のときの内部の点 >

x 座標	1	2	3	4
個数	6	6	4	2

x 座標が 3, 4 の点が 1 個ずつ増えるので、合計 18 個となる。

ここで、②に $x=5$ を代入すると、

$(5, \frac{25}{4})$ となり、 y 座標が 6 より大きい。

よって、 x 座標が 5, 6 である内部の点は存在しない。

したがって、 $b=10$ となるとき、 x 座標が 3, 4 の点が 1 個ずつ増えてしまうので、求める b の範囲は、

$$9 \leq b < 10$$

【コメント】

大学入試でも高校入試でも凶悪な格子点問題です。色々な解き方あるでしょうね、とりあえず解答例作ってみました、これもしかしたら最悪な解法の可能性だってあります。

(2) ②の条件の与え方が目新しいというか、何か嫌な感じです(良い意味で)。 $\frac{1}{2}$ → 格子点 18 個とすぐ変換は出来るでしょうが、その後どう適切に考えるか。最後の問題だし、なかなか難しいでしょうね。

【作成】

高校入試 数学 良問・難問

<https://hokkaimath.jp/>