芸術的な高校入試第 39 回	
美しさ：★★★★★☆	難易度：★★★★★☆

出典：2011 年度　都立　立川高校

下の図 1 に示した立体 ABC-DEF は，AB = BC = CA =8 cm，AD＝8 cm，側面がすべて正方形の三角柱である。

点 P は，頂点 A を出発し，毎秒 2 cm の速さで，辺 AC，辺 CF 上を A，C，F の順に動き，8 秒後に頂点 F に到着し，止まる。

点 Q は，点 P が点 A を出発すると同時に，頂点 A を出発し，毎秒 1 cm の速さで，辺 AB 上を動き，8 秒後に頂点 B に到着し，止まる。

点 R は点 P が点 A を出発すると同時に，頂点 A を出発し，毎秒 2 cm の速さで，辺 AD，辺 DE 上を A，D，E の順に動き，8 秒後に頂点 E に到着し，止まる。点 P と点 Q，点 Q と点 R をそれぞれ結ぶ。次の各問に答えよ。

問 1　点 P が辺 AC 上にある場合を考える。PQ = 6 cm のとき,線分 QR の長さは何 cm か。

問 2　下の図 2 は，図 1 において，点 P が頂点 A を出発してから 5 秒後のとき，頂点 A と点 P，頂点 A と点 R，点 P と点 R をそれぞれ結んだ場合を表している。立体 P-AQR の体積は何 cm^3 か。

問 3　図 1 において，点 P が頂点 A を出発してから 6 秒後のとき，点 P と点 R を結んでできる△PQR の面積は何 cm^2 か。

図 1

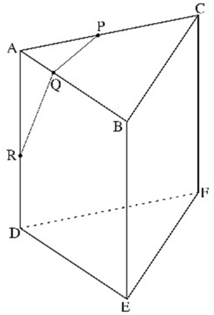
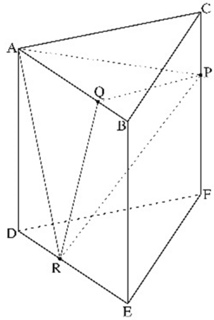
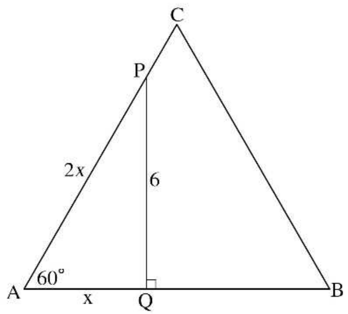


図 2



【解答例】

問 1（7 点）



$\angle PAQ = 60^\circ$，AP：AQ＝2：1 だから，

△APQ は直角三角形である。

$1:\sqrt{3} = x:6$　なので，$x = 2\sqrt{3}$

よって，直角三角形 AQR において，

$AQ = 2\sqrt{3}$ cm，$AR = 4\sqrt{3}$ cm だから，

$QR = \sqrt{12+48} = \mathbf{2\sqrt{15}\ cm}$

問 2（7 点）

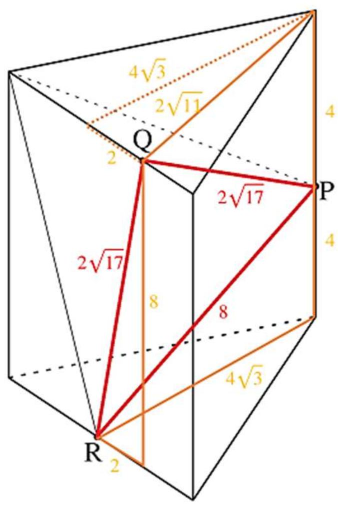
P から正方形 ABED に垂線を下ろし交点を H とすると，$PH = 4\sqrt{3}$ cm

（正三角形 ABC において，辺 AB を底辺としたときの高さと同じ長さ）

$AQ = 5$ cm なので，$\triangle AQR = \frac{1}{2} \times 5 \times 8 = 20\ \text{cm}^2$

したがって，立体 $P-AQR = \frac{1}{3} \times 20 \times 4\sqrt{3} = \mathbf{\frac{80\sqrt{3}}{3}\ cm^3}$

問 3（7 点）



<u>Point　大人しく△PQR の各辺の長さを出す</u>

図より，$PR = 8$ cm，$QR = QP = 2\sqrt{17}$ cm と

なるから，△PQR は二等辺三角形である。

点 Q から PR に垂線を下ろすと，その垂線の

長さは，$\sqrt{68-16} = 2\sqrt{13}$ cm

△PQR の面積は，

$\frac{1}{2} \times 8 \times 2\sqrt{13} = \mathbf{8\sqrt{13}\ cm^2}$

【コメント】

問 1 は，図をしっかり書けば，PA：AQ＝2：1，∠PAQ＝60°から，あの有名三角形を思い出すと思われます。

問 2 は, P が CF 上にいるとき, 常に高さは同じということに気づく問題, 一見難しそうですが余裕です。出題を工夫すれば，中 1 でも解ける。良い問題ですね。

問 3 は，信じる心，強靭な精神が試されます。大人しく各辺の長さを出したら，二等辺三角形となり，嬉しい。

同じ立体問題で，様々な方向から聞いています。難易度も計算も丁度よく，素晴らしい問題ですね。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問

https://hokkaimath.jp/