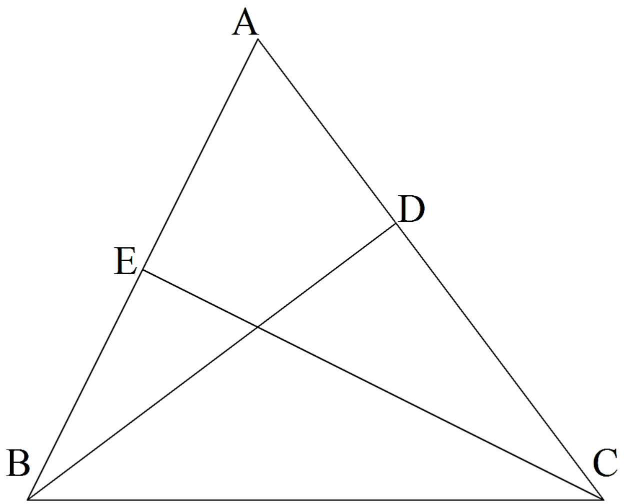
| 芸術的な高校入試第３回 | |
|---|---|
| 美しさ：★★★★☆☆ | 難易度：★★★★☆☆ |

出典：2016 年度　立川高校　など（グループ作成校）

下の図のように，鋭角三角形 ABC があります。頂点 B，C からそれぞれ辺 AC，AB に垂線を下ろし，交点をそれぞれ D，E とします。次の問いに答えなさい。




問 1　△ABC∽△ADE を証明しなさい。

問 2　AB＝13 cm，AC＝14 cm，BC＝15 cm とします。線分 DE の長さを求めなさい。

※本来の問 1 は省略。

**【コメント1】**

この芸術的な入試問題は，案外気分で選んでいます。この問題は図が簡素なくせに，まあまあ証明が長いので，良い問題と言えます。図が簡素であれば何でもいいのです。

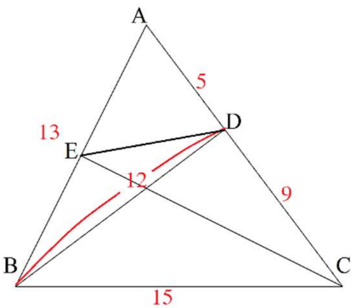
さて，高校入学後に皆さんは，BD と CE の交点を「垂心」と呼ぶことを習いますね。高校入試なんだから，高校知識，大学知識で有利になるような問題はあまり出してはいけません。あんまりならないか。ただ問題文の短さ，図の簡素さで入賞です。誰から目線なんでしょうね。円のえの字も無い状態から，円を思い浮かべられるか！？頭が高校入試なら余裕ですね。

**【解答例】**

問 1（10 点）

△ABC と△ADE において，
共通な角だから，∠BAC＝∠DAE…①
仮定より，∠BEC＝∠BDC＝90° だから，円周角の定理の逆より，4 点 B，C，D，E は BC を直径とする同一円周上にある。
したがって，$\overset{\frown}{BE}$に対する円周角は等しいから，∠BCE＝∠BDE
また，∠ABC＝180° －90° －∠BCE＝90° －∠BCE
　　　∠ADE＝90° －∠BDE
したがって，∠ABC＝∠ADE…②
①，②より 2 組の角がそれぞれ等しいから，△ABC∽△ADE

問 2（8 点）




（解答例 1）

CD＝$x$ と置くと，

$$BD = \sqrt{225 - x^2} = \sqrt{169 - (14 - x)^2}$$

これを解いて，$x$＝9

だから，CD＝9，AD＝5，BD＝12

△ADE∽△ABC より，

AD：DE＝AB：BC

5：DE＝13：15　**$DE = \dfrac{75}{13}$ cm**

（解答例 2）

DE＝$x$ cm とおく。△ADE∽△ABC より，$x$ : 15＝AE : 14

$$AE = \frac{14}{15}x \text{ cm}$$

$$BE = AB - AE = 13 - \frac{14}{15}x$$

△AEC において，三平方の定理より，

$$EC = \sqrt{196 - \frac{196}{225}x^2}$$

したがって，△BEC において，三平方の定理より，

$$BE^2 + EC^2 = BC^2$$

$$\left(13 - \frac{14}{15}x\right)^2 + \left(196 - \frac{196}{225}x^2\right) = 225$$

$$169 - \frac{364}{15}x + 196 = 225$$

$$\frac{364}{15}x = 140 \quad x = \frac{75}{13} \quad DE = \boldsymbol{\frac{75}{13}\ \mathbf{cm}}$$

**【コメント 2】**

問 1 は円周角の定理の逆に気づき，90°－同じ大きさの角に気づけば楽勝です。ただ簡素な図からここまで長い証明書かされるとは思わないでしょう。恐ろしい問題。

問 2 の解答例 1 は，3 辺が自然数となる直角三角形を覚えていれば，もっと楽勝です。

**【作成】**

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/