

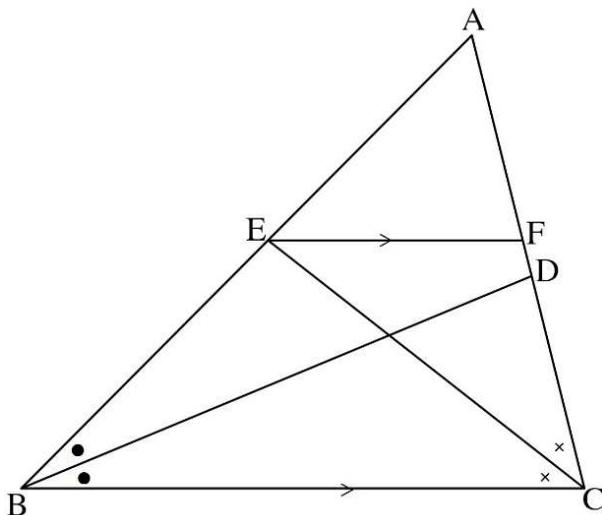
芸術的な高校入試第 40 回

美しさ：★★★★★☆☆

難易度：★★★★★★★

出典：いつかの大分県

下の図のように $\triangle ABC$ があり、 $\angle B$ の2等分線と辺 AC との交点を D 、 $\angle C$ の2等分線と辺 AB との交点を E とします。また、点 E から辺 BC に平行な直線を引き、辺 AC との交点を F とします。次の問いに答えなさい。



- 問1 $\triangle FEC$ が二等辺三角形であることを証明しなさい。
- 問2 $AF=4\text{ cm}$ 、 $BC=15\text{ cm}$ のとき、線分 EF の長さを求めなさい。
- 問3 $AF=5\text{ cm}$ 、 $FD:DC=1:5$ 、線分 EB が線分 FC より 6 cm 長いとき、線分 AE の長さを求めなさい。

【解答例】

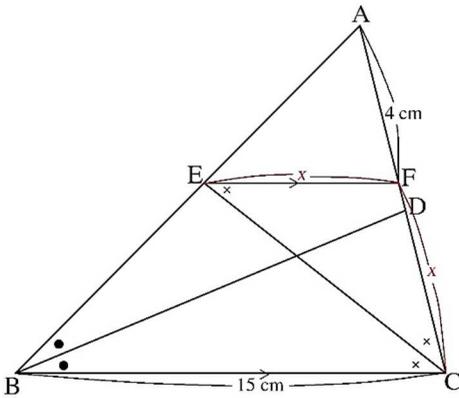
問 1 (3 点)

仮定より, $\angle ECB = \angle ECF$

$EF \parallel BC$ より平行線の錯角は等しいから, $\angle ECB = \angle CEF$

したがって, $\angle ECF = \angle CEF$ なので, 2つの角が等しいから, $\triangle FEC$ は二等辺三角形。

問 2 (3 点)



$EF = x$ と置くと, $FC = x$

$\triangle AEF \sim \triangle ABC$ だから,

$AF : AC = EF : BC$

$$4 : (4 + x) = x : 15$$

$$x^2 + 4x - 60 = 0$$

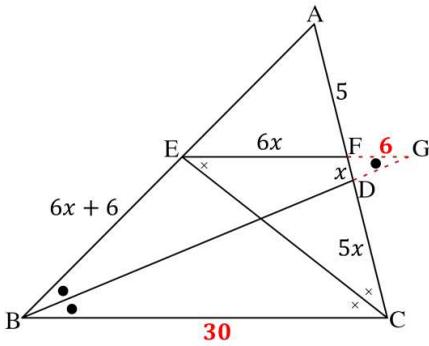
$$(x + 10)(x - 6) = 0$$

$x > 0$ より, $x = 6$

EF = 6 cm

問3 (4点)

【解法1 想定】



BD と EF との交点を G とする。

FD = x と置くと、DC = 5x、EF = 6x、

EB = 6x + 6 と表される。

△EBG は二等辺三角形なので、

EG = 6x + 6、したがって、FG = 6

△DFG ≅ △DCB だから、

1 : 5 = 6 : CB CB = 30

したがって、△AEF ≅ △ABC より、

$$6x : 30 = 5 : (5 + 6x) \quad 6x^2 + 5x - 25 = 0$$

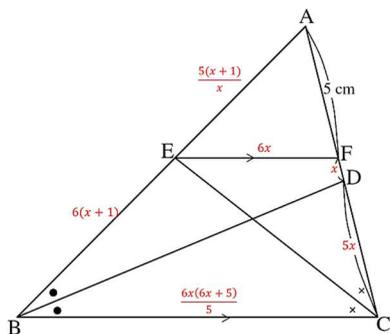
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 600}}{12} = \frac{-5 \pm 25}{12} = -\frac{5}{2}, \frac{5}{3} \quad x > 0 \text{ より、} x = \frac{5}{3}$$

$$\text{したがって、} AE = \frac{5x + 5}{x} = \left(\frac{25}{3} + 5\right) \div \frac{5}{3} = \frac{40}{3} \times \frac{3}{5} = \mathbf{8 \text{ cm}}$$

※因数分解できるなら、

$6x^2 + 5x - 25 = (3x - 5)(2x + 5) = 0$ としても良い。(高校範囲だけど)

【解法 2 力技】



$FD=x (>0)$ と置くと、 $DC=5x$, $EF=6x$, $EB=6x+6 (=6(x+1))$ と表される。

$AF : FC=AE : EB$ より、

$$5 : 6x = AE : 6(x+1) \quad AE = \frac{5(x+1)}{x}$$

$AF : AC=EF : BC$ より、

$$5 : (5+6x) = 6x : BC \quad BC = \frac{6x(6x+5)}{5}$$

$$AB = 6(x+1) + \frac{5}{x}(x+1) = \left(6 + \frac{5}{x}\right)(x+1)$$

$\angle B$ の 2 等分線において、 $BC : BA=CD : DA$ であるから、

$$\left(\frac{6x(6x+5)}{5}\right) : \left(6 + \frac{5}{x}\right)(x+1) = 5x : (x+5) \quad \text{両辺} \frac{1}{x} \text{ をかけて、}$$

$$\left(\frac{6x(6x+5)}{5}\right) : (6x+5)(x+1) = 5x : (x^2+5x)$$

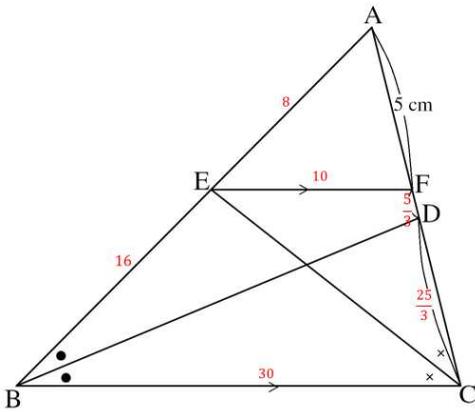
$$\frac{6x}{5} : (x+1) = 5 : (x+5) \quad 5(x+1) = \frac{6}{5}(x^2+5x) \quad 6x^2+5x-25=0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+600}}{12} = \frac{-5 \pm 25}{12} = -\frac{5}{2}, \frac{5}{3} \quad x > 0 \text{ より、} x = \frac{5}{3}$$

$$\text{したがって、} AE = \frac{5x+5}{x} = \left(\frac{25}{3}+5\right) \div \frac{5}{3} = \frac{40}{3} \times \frac{3}{5} = \mathbf{8 \text{ cm}}$$

【コメント】

問3の最終的な図



最終的にはとてもきれいな数字に落ち着きます。

【作成】

高校入試 数学 良問・難問

<https://hokkaimath.jp/>