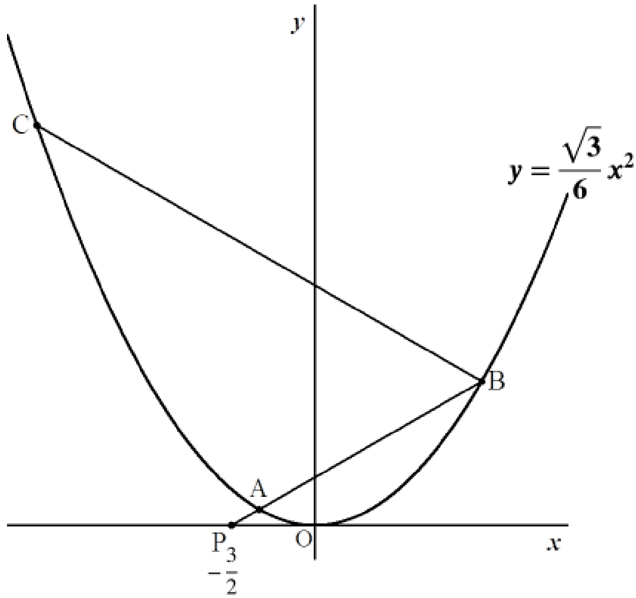
芸術的な高校入試第 45 回	
美しさ：★★★★★☆	難易度：★★★★★☆

出典：2020 年度　開成高校（高校入試）

O を原点，P の座標を $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ とする。下図のように，$y=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2$ のグラフ上に 3 点 A，B，C がある。ただし，∠OPA＝∠OPB＝30°，∠ABC＝60° である。このとき，次の問いに答えよ。ただし，(1) から (3) までは答えのみ書くこと。



(1) 3 点 A，B，C それぞれの座標を求めよ。

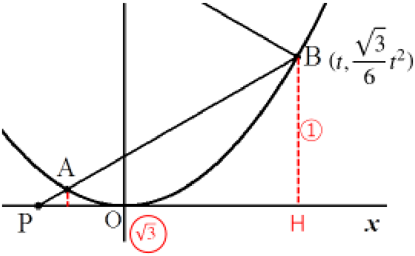
(2) 3 点 A，B，C を通る円の中心の座標を求めよ。

(3) 点 B を接点とする (2) の円の接線の式を求めよ。

(4) $y=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2$ のグラフ上にも (3) で求めた直線上にある点は，点 B のみであることを証明せよ。

【解答解説】

(1)(2 点×3)



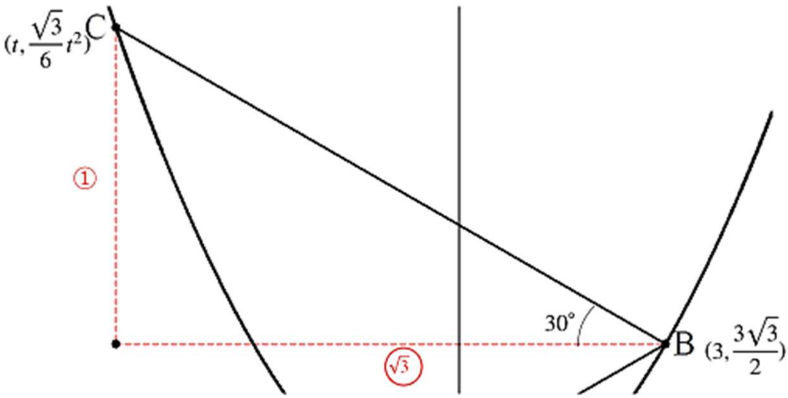
$\angle$OPA＝30° なので，B から x 軸に垂線を下ろし交点を H とすると，

PH：BH＝$\sqrt{3}$：1

$\left(\frac{3}{2}+t\right):\frac{\sqrt{3}}{6}t^2=\sqrt{3}:1$

$\frac{1}{2}t^2=\frac{3}{2}+t$　$t^2-2t-3=0$　$(t-3)(t+1)=0$　$t=3,-1$　$\mathbf{B\left(3,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$

同様に，点 A は$t=-1$ なので，$\mathbf{A\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{6}\right)}$

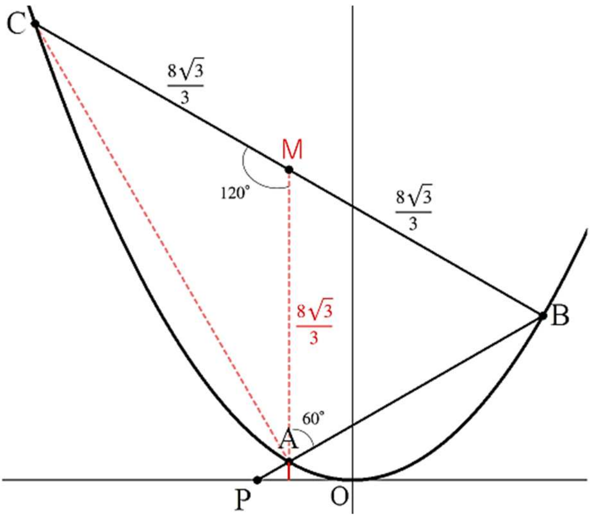


図より，$(-t+3):\left(\frac{\sqrt{3}}{6}t^2-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}:1$　$-t+3=\frac{1}{2}t^2-\frac{9}{2}$

$t^2+2t-15=0$　$(t-3)(t+5)=0$　$t=3,-5$　$t<0$ より，$\mathbf{C\left(-5,\frac{25\sqrt{3}}{6}\right)}$

（2）（5 点）

円の中心は，2 つの弦の垂直二等分線の交点であるから，AB や BC の垂直二等分線を引こうとしてみる。すると，ここまで物凄く綺麗に図を描いたり，勘があれば，BC の中点の x 座標が，A の x 座標と一致することに気づく。



すると，∠MAB＝∠ABM＝60°　であるから，△ABM は正三角形。

M は BC の中点なので，$M\left(-1, \frac{17\sqrt{3}}{6}\right)$　$AM = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ となり，

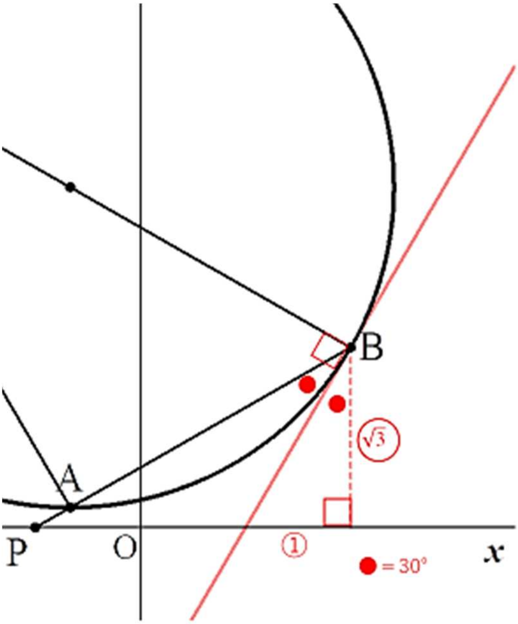
$BM = CM = \frac{8\sqrt{3}}{3}$　△MAC は二等辺三角形，∠MAC＝30°　となるから，

∠BAC＝90°　となる。

※または，勘や物凄く綺麗な図で「∠BAC＝90°　だな」と思い，∠BAC＝90°　であることを傾き×傾き＝－1 等で確認するか，△ABC の各辺の長さを出して確認するか，またはもう突き進むかすればよい。

よって，3 点 A，B，C を通る円は，BC が直径となるので，円の中心の座標は $\boldsymbol{\left(-1, \frac{17\sqrt{3}}{6}\right)}$

（3）（5 点）



円の接線と，直線 CB は垂直に交わるので，左図のように，30° がたくさんできる。

接線の傾きは，x の増加量が 1，y の増加量が $\sqrt{3}$ と分かるので，傾きは，$\sqrt{3}$ B$\left(3,\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$を通るので，接線の式は，

$$\boldsymbol{y=\sqrt{3}x-\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

（4）（4 点）

$$\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x^2 \\ y=\sqrt{3}x-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

この連立方程式を解くと，グラフと円の接線との交点が求められる。

$\dfrac{\sqrt{3}}{6}x^2=\sqrt{3}x-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　$x^2=6x-9$　$x^2-6x+9=0$　$(x-3)^2=0$

x＝3　解が点 B の x 座標である x＝3 しか存在しないので，

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x^2$ のグラフ上にも（3）で求めた直線上にある点は，点 B のみである。

【コメント】

高校数学，数 2B 履修後だと，計算パワーに頼りたくなりますが，中学生らしい解法ができる問題です。

高校生でも，数 2B 習っている間（直線と式の分野あたり）に，1 度解いておくとよいかもしれません。大学入試においても，有名角度が出てくる問題は，計算パワーももちろん良いですが，中学生らしく解くと楽できることがあります。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/