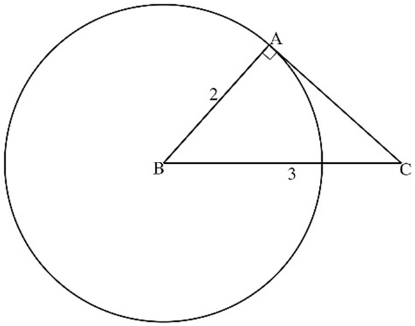
芸術的な高校入試第 47 回	
美しさ：？？？？？？？	難易度：？？？？？？？

出典：2019 年度　滋賀県立膳所高校　特色問題

AB＝2，BC＝3 で辺 CA の長さが変化する△ABC がある。点 A から辺 BC におろした垂線と辺 BC の交点を D とする。∠ACB の大きさが最大になるときの線分 AD の長さを求めなさい（入試では答えのみを書く形式）。

※もちろん高校入試なので，余弦定理や三角関数，微分は不要！

【中学生の解答例】



図のようにBCを固定すると, 点Aは, 点Bを中心とする半径2の円周上を動く。

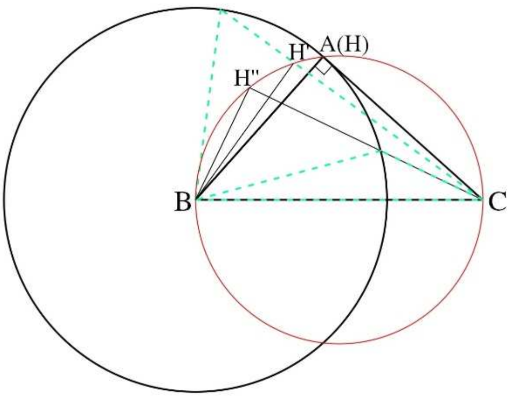
CAが円の接線となるとき，∠ACBも最大となる。

よって，$AC=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$で,

△ABD∽△CBAなので，AD：AB＝CA：CB

$$AD=\frac{AB\bullet CA}{CB}=\frac{2\bullet\sqrt{5}}{3}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{5}}{3}}$$

＜なぜ接線のとき最大？＞



点Bから直線CAに垂線を下ろし，交点をHとする。

するとこのHは，BCを直径とする円周上を動く。

∠ACBが最大のとき, $\overset{\frown}{BH}$が最大。このとき，弦BHも最大である。（※1）

BHが最大となるときは，点Hが点Aと一致するときなので（※2），∠BAC＝90°のとき，∠ACBが最大となる。

（※1）弦は中心角の大きさに比例しないが, 中心角または弧が最小（最大）のとき，弦も最小（最大）となる。

（※2）△BAHができるとき，BA（＝2）が必ず直角三角形の斜辺となる

【高校生の解答例 1　余弦定理　たぶん最も一般的】

CA＝x(＞0)と置く。∠ACB は，AD が辺 BC と交わるので，

0°＜∠ACB＜90°である。よって，cos ∠ACBが最小値をとるとき，∠ACB は最大となる。余弦定理より，

$$4 = x^2 + 9 - 6x\cos\angle\mathrm{ACB} \qquad \cos\angle\mathrm{ACB} = \frac{x^2+5}{6x} = \frac{1}{6}\bullet\frac{\left(x^2+5\right)}{x} = \frac{1}{6}\bullet\left(x+\frac{5}{x}\right)$$

相加平均≧相乗平均より，

$x + \dfrac{5}{x} \geq 2\sqrt{x\bullet\dfrac{5}{x}} = 2\sqrt{5}$　等号成立条件は，$x = \dfrac{5}{x}$　すなわち$x = \sqrt{5}$のとき

よって，$x = \sqrt{5}$のとき，cos ∠ACBは最小値をとるから，∠ACB は最大となる。

このとき，$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2$がなりたつので，∠A＝90°

よって△ABD∽△CBA なので，AD：AB＝CA：CB

$$\mathrm{AD} = \frac{\mathrm{AB}\bullet\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} = \frac{2\bullet\sqrt{5}}{3} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{5}}{3}}$$

【高校生の解答例 2　微分】

B（0, 0），C（3, 0）と置くと，点 A は点 B を中心とする半径 2 の円周上を動く。∠ABC＝θ とすると，AD は BC と交わるから，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$A(2\cos\theta, 2\sin\theta)$，$D(2\cos\theta, 0)$となるから，

$\tan\angle ACB = \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{2\sin\theta}{3-2\cos\theta}$　　$f(\theta) = \dfrac{2\sin\theta}{3-2\cos\theta}$と置くと，

$$f'(\theta) = \frac{2\cos\theta(3-2\cos\theta) - 2\sin\theta(2\sin\theta)}{(3-2\cos\theta)^2} = \frac{-4+6\cos\theta}{(3-2\cos\theta)^2}$$

$\cos\theta = \dfrac{2}{3}$のとき$f'(\theta)=0$，このときの$\theta=\alpha$とし，$\sin\alpha = \sqrt{1-\dfrac{4}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

だから，増減表を書くと，

θ	0	α	$\dfrac{\pi}{2}$
f'	＋	0	−
f	↗	$f(\alpha)$	↘

よって，$\theta=\alpha$のとき，$f(\theta)$は最大値をとる。このとき，

$AD = 2\sin\theta = 2\times\dfrac{\sqrt{5}}{3} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{5}}{3}}$

※arctan は大学生で習うので一応除外

【コメント】

膳所高校では解答を書くだけの形式でしたが，説明するとなると，けっこうまどろっこしい。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/