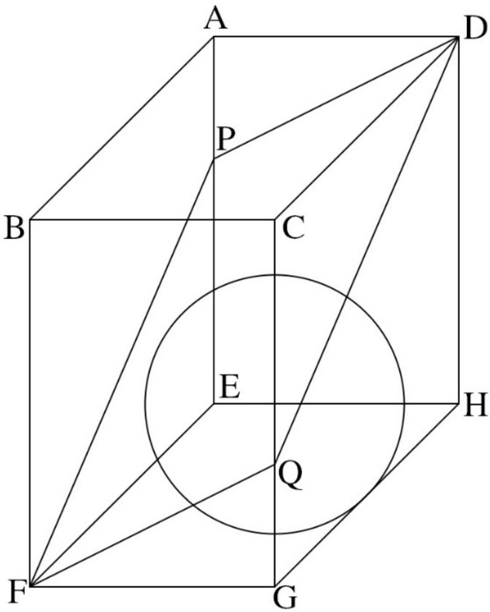
芸術的な高校入試第 48 回	
美しさ：★★★★☆☆	難易度：★★★★★★

出典：2018 年度　洛南高校（高校入試）

直方体 ABCD-EFGH がある。AB＝AD＝2，AE＝3 である。点 P，Q はそれぞれ辺 AE，CG 上にあり，AP＝1，CQ＝2 である。4 点 P，F，Q，D は同じ平面上にある。面 PFQD，面 PEHD，面 QGHD，面 EFGH のすべての面に接する球を S とする。直線 DP と直線 HE の交点を P’とする。このとき，次の問いに答えよ。



（1）HP’の長さを求めよ。

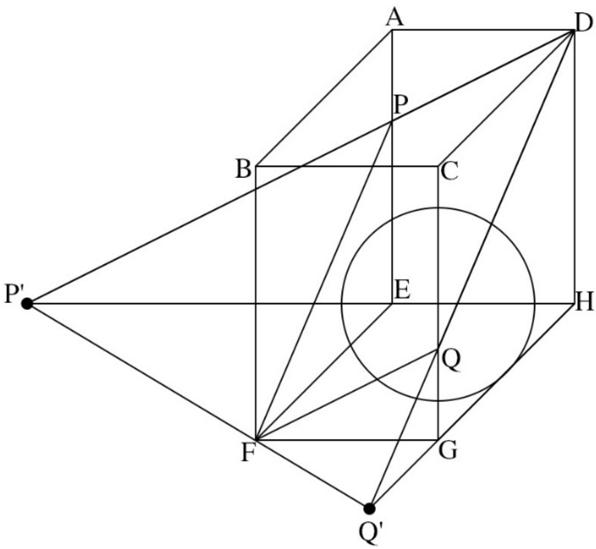
（2）DP’の長さを求めよ。

（3）立体 QFG-DP’H の体積を求めよ。

（4）球 S の半径を求めよ。

【解答例】※ここにある解法が必ずしも最適とは限りません。

(1)



△APD∽△EPP’より，

EP’＝2AD＝4　HP’＝**6**

(2)

$DP' = \sqrt{3^2+6^2} = \mathbf{3\sqrt{5}}$

(3)

直線 DQ と HG との交点

を Q’とする。

△Q’GQ∽△DCQ より，

Q’G＝1

三角錐 Q’-FGQ と三角錐 Q’-P’HD は相似である。相似比は 1：3。

三角錐$Q'-P'HD = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 6\times 3\times 3 = 9$　なので，

立体 $QFG-DP'H$ の体積は，$9\times\dfrac{(27-1)}{27} = \mathbf{\dfrac{26}{3}}$

類題：2016 年度東京都　https://hokkaimath.jp/blog-entry-158.html

（4）

球 S の中心を O とし，半径を r とする。

三角錐 Q’-P’HD

＝三角錐 S-P’Q’D＋三角錐 S-P’HD＋三角錐 S-DHQ’＋三角錐 S-P’Q’H

△P’Q’D

$\mathrm{P'Q'}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$，$\mathrm{DQ'}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$なので，

$\mathrm{DP'}=\mathrm{P'Q'}=3\sqrt{5}$の二等辺三角形なので，DQ’底辺としたとき高さは，

$\sqrt{45-\frac{18}{4}}=\sqrt{\frac{81}{2}}=\frac{9}{\sqrt{2}}$　　$\triangle\mathrm{P'Q'D}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{9}{\sqrt{2}}=\frac{27}{2}$

$\triangle\mathrm{P'HD}=\frac{1}{2}\times6\times3=9$　　$\triangle\mathrm{DHQ'}=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$

$\triangle\mathrm{HP'Q'}=\frac{1}{2}\times6\times3=9$

よって，

$9=\frac{1}{3}\left(\frac{27}{2}+9+\frac{9}{2}+9\right)r$　$9=12r$　$\boldsymbol{r=\frac{3}{4}}$

類題：2019 年度沖縄県　https://hokkaimath.jp/blog-entry-148.html

（まずこの問題をやった方が better）

【コメント】

（1）（2）は当たり前に解いて，（3）（4）でどれぐらい稼げるかです。典型的な難問を少しいじっています。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/