

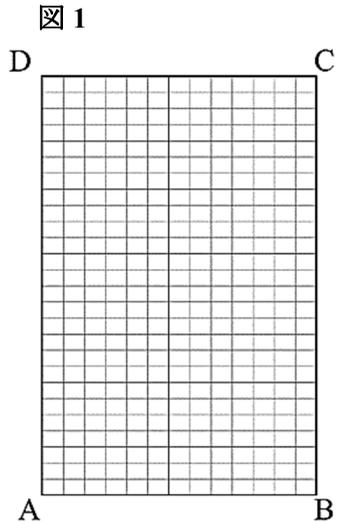
芸術的な高校入試第 49 回

美しさ：★★★★★☆☆

難易度：★★★★★☆☆

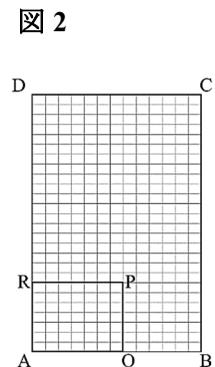
出典：2021 年度立川高校 大問 4

右の図 1 で，四角形 ABCD は $AB=104$ cm， $AD=156$ cm の長方形である。四角形 ABCD の内部に，辺 AD に平行で辺 AD と長さが等しい線分を，となり合う辺と線分，となり合う線分と線分のそれぞれの間隔が 8 cm になるように 12 本引き，辺 AB に平行で辺 AB と長さが等しい線分を，となり合う辺と線分，となり合う線分と線分のそれぞれの間隔が 6 cm になるように 25 本引く。次の各問に答えよ。



問 1 図 1 において，頂点 A と頂点 C を結んだ場合を考える。線分 AC が，辺 AD に平行な線分または辺 AB に平行な線分と交わるときにできる交点は何個あるか。ただし，辺 AD に平行な線分と辺 AB に平行な線分の交点および頂点 A，頂点 C は除くものとする。

問 2 右の図 2 は，図 1 において，辺 AD に平行な線分と辺 AB に平行な線分との交点のうちの 1 つを P とし，点 P を通り辺 AD に平行に引いた線分と辺 AB との交点を Q，点 P を通り辺 AB に平行に引いた線分と辺 AD との交点を R とした場合を表している。ただし，点 P は辺 AB 上にも辺 AD 上にもないものとする。四角形 AQPR において， $PR=2PQ$ となるもののうち，面積が最大になる場合の面積は何 cm^2 か。



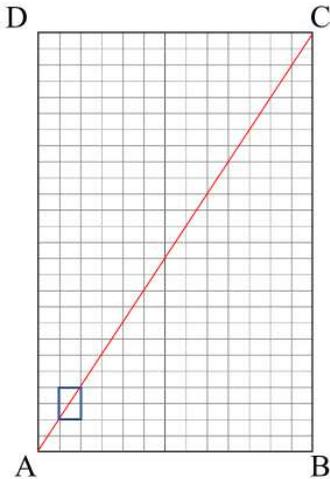
問3 底面が縦6 cm, 横8 cmの長方形で, 高さが9 cmの直方体のブロックを十分な数だけ用意し, (1), (2)の手順に従って直方体S, 直方体Tを作る場合を考える。

(1)ブロックの底面を図1の直線でできたマスに合わせて置き, ブロック同士の側面がぴったり重なるように隙すき間もなく並べて, 底面が四角形ABCDの内部に収まるような高さが9 cmの直方体Sを作る。

(2)(1)で作った直方体Sを何個も作り, 直方体Sの高さを変えずに隙間なく2段, 3段, 4段, ……と何段か縦に積み上げて直方体Tを作る。この直方体Tが立方体になるとき, 使われるブロックは全部で何個か。ただし, 答えだけでなく, 答えを求める過程が分かるように, 途中の式や計算なども書け。

【解答例】 ※必ずしもここにある解答例が最適とは限りません。

問 1 (7 点)



直線 AC を結ぶと、格子点から、次の格子点は、右に 8 cm、上に 12 cm 進むとあるということが分かる。

これらの格子点を含む青い長方形内に格子点を除く交点は 1 個ある。

この青い長方形は、 $104 \div 8 = 13$ (または $156 \div 12 = 13$) 個できるので、答え **13 個**

問 2 (7 点)

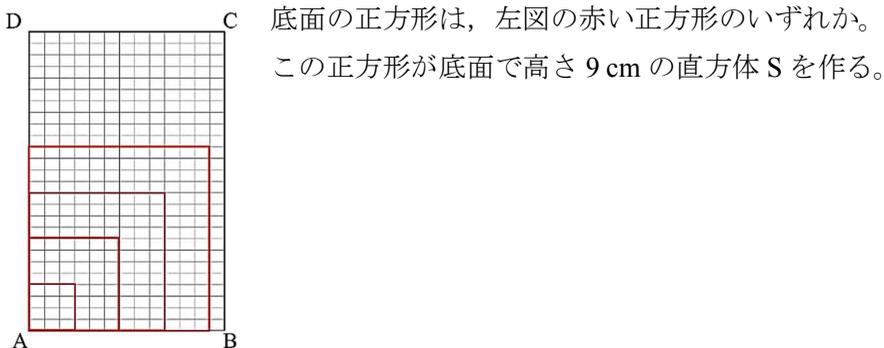


PQ は、1 目盛り 6 cm がいくつかつながったものなので、6 の倍数である。よって、 $PR = 2PQ$ のとき、 $PR \div 2$ が、6 の倍数となればよい。

PR は、1 目盛り 8 cm がいくつかつながったものなので、8 の倍数である。3 目盛り (24 cm) 毎に 6 の倍数となるので、最大は 12 目盛りの 96 cm。このとき $PQ = 48$ cm だから、求める面積は $96 \times 48 = 4608$ cm²

問3 (11点)

立方体なので、直方体 S の底面が、正方形となる場合を考える。
6 と 8 の最小公倍数は 24 なので、考えられる正方形は、
1 辺が 24 cm, 48 cm, 72 cm, 96 cm の正方形のいずれかである。
底面がこれらいずれかの正方形で、高さ 9 cm の直方体を縦に重ねて立方体を作るには、正方形の 1 辺の長さは 9 の倍数である必要があるので、正方形の 1 辺の長さは 72 cm である。
このとき、1 段で使用するブロックは、 $(72 \div 8) \times (72 \div 6) = 108$ 個
これが、8 段重なれば、高さが 72 cm となるので、
使用するブロック数は、 $108 \times 8 = 864$ 個



【コメント】

見た目のインパクト凄いです。規則性、素因数分解系の問題です。あと、日本語読解問題。

問1「辺 AD に平行な線分と辺 AB に平行な線分の交点のはぞく」とあるので、格子点と線分 AC の交点は除きます。間違えた受験生多そう。

立川高校あるある？ですが、問1と問2の難易度が反転していることがあります。今回は、どう考えても問2の方が簡単ですね。

問3も、日本語が読めれば難なく解けると思われます。時間との闘い。説明するの難しそう。

【作成】 高校入試数学良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>