

芸術的な高校入試第 51 回

美しさ：★★★★☆☆

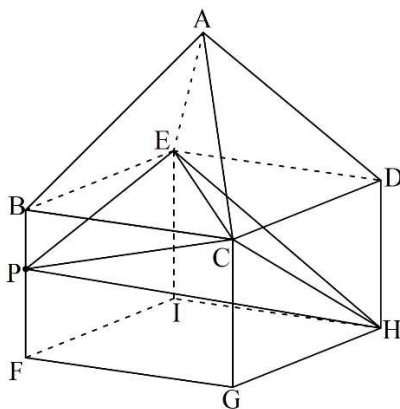
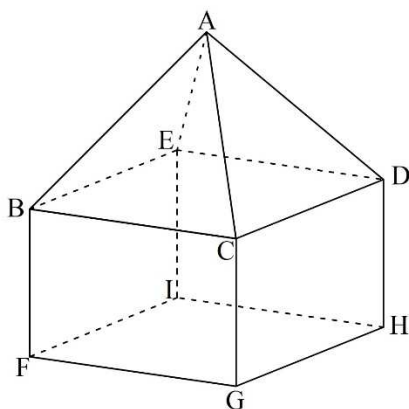
難易度：★★★★☆☆

出典：2021 年度 福岡県

図 1 は、正四角すいと直方体をあわせた形で、点 A, B, C, D, E, F, G, H, I を頂点とする立体を表している。BC=6 cm, BF=5 cm である。図 2 は、図 1 に示す立体において、辺 BF 上に点 P を、BP=2 cm となるようにとり、点 P, H, E, C を頂点とする四面体 PHEC をつくったものである。

図 1

図 2



次の (1) ~ (3) に答えよ。

(1) 図 1 に示す立体において、次の の中の①~③に全てにあてはまる辺を答えよ。

- ① 辺 AB とねじれの位置にある辺
- ② 面 BFIE と垂直である辺
- ③ 面 FGHI と平行である辺

(2) 図 1 に示す立体において、辺 AD 、 AE 上にそれぞれ点 J 、 K を、 $AJ : JD = 1 : 2$ 、 $AK : KE = 1 : 2$ となるようにとる。点 J から辺 FG に垂線をひき、辺 FG との交点を L とする。

四角形 $KFGJ$ の面積が $16\sqrt{5} \text{ cm}^2$ のとき、線分 JL の長さを求めよ。

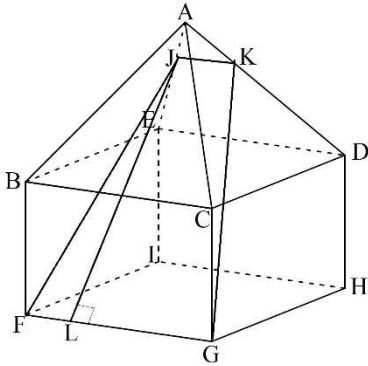
(3) 図 2 に示す立体において、四面体 $PHCE$ の体積を求めよ。

【解答例】 ※ここにある解答が必ずしも最適とは限りません。

(1) (2点)

辺 ED

(2) (2点)



$\triangle AKJ \sim \triangle ADE$ なので, $KJ : DE = 1 : 3$
であるから, $KJ = 2 \text{ cm}$

$KJ \parallel GF$ より, 四角形 $KFGJ$ は台形だから,
 $JL = x \text{ cm}$ とすると,

$$16\sqrt{5} = \frac{1}{2} \times (6 + 2) \times x \quad x = 4\sqrt{5}$$

$JL = 4\sqrt{5} \text{ cm}$

(3) (4点)

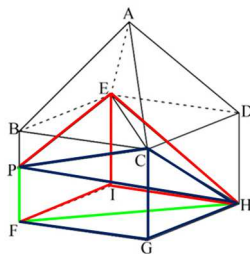
(解答例 1)

四面体 PHCE

= 直方体 BCDE-FGHI - 三角錐 C-DEH - 三角錐 C-BEP - 四角錐 H-CGFP
 - 四角錐 H-EIFP である。各々の体積を求めて計算すると、

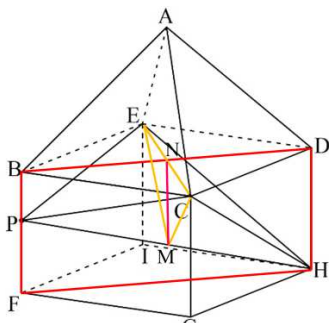
四面体 PHCE

$$\begin{aligned}
 &= 6 \times 6 \times 5 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times 6 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times 6 \\
 &\quad - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (3+5) \times 6 \times 6 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (3+5) \times 6 \times 6 \\
 &= 180 - 30 - 12 - 48 - 48 = \mathbf{42 \text{ cm}^3}
 \end{aligned}$$



(解答例 2)

Point 立体を等積変形する！

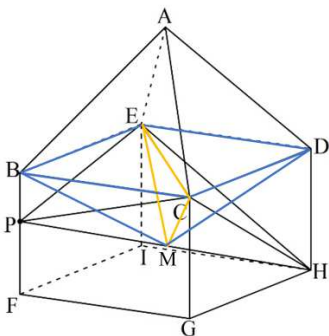


2点 E, C を通り, BF, DH に平行な平面を書き, 平面と PH との交点を M とする。

三角錐 P-CEM において, $\triangle CEM \parallel BP$ だから,
 三角錐 P-CEM = 三角錐 B-CEM

同様に, 三角錐 H-CEM = 三角錐 D-CEM

となる。よって, 結局, 四角錐 M-BCDE の体積を求めればよい。



BD と $\triangle CEM$ との交点を N とすると, MN が高さとなる。直線 NM と FH との交点を O とし, 中点連結定理より, $PF = 2MO$ だから,

$$MO = \frac{1}{2} PM = \frac{3}{2} \quad \text{よって, } MN = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

よって求める体積は,

$$\frac{1}{3} \times 6^2 \times \frac{7}{2} = \mathbf{42 \text{ cm}^3}$$

【コメント】

(1) は知識確認問題（分からない人はこんなプリント解いていないで教科書や学校ワークに戻ってください）、(2) は条件の与え方特殊ですが、よくある問題です。(3) は、中学入試あるあるの立体における等積変形問題、その難問バージョンです。1 度解いておくとたぶんよいことあります。と、思いきや、空間図形を見る目があれば、等積変形なんて面倒なことしなくても普通に解けます。FH で区切られるかどうか。

【作成】

高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>