

芸術的な高校入試第 56 回

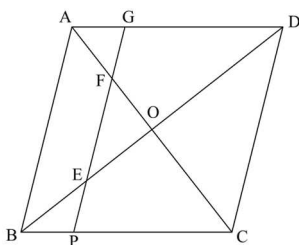
美しさ：★★★★★★

難易度：★★★★★★

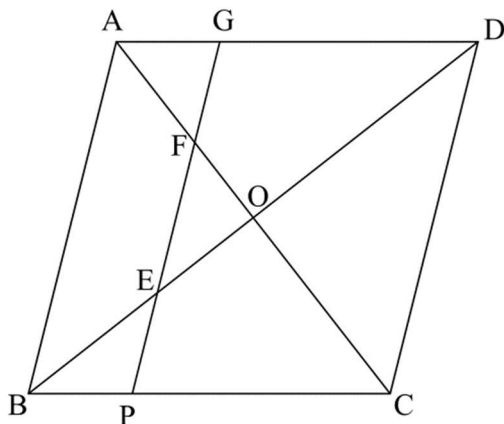
出典：2021 年 大分県

下の図のように、ひし形 $ABCD$ があり、対角線 BD と対角線 AC の交点を O とする。また、辺 BC 上に点 P があり、点 P を通り辺 AB に平行な直線と、対角線 BD , 対角線 AC , 辺 AD との交点をそれぞれ E , F , G とする。ただし、点 P は、頂点 B または頂点 C と一致しない。

次の (1), (2) の問いに答えなさい。



- (1) $\triangle ABC \sim \triangle FPC$ であることを証明しなさい。
- (2) $AB = 5 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$ とする。また、 $\triangle BPE$ の面積と $\triangle EOF$ の面積が等しくなるように点 P をとる。次の①, ②の問いに答えなさい。
 - ① 線分 BO の長さを求めなさい。
 - ② $\triangle AFG$ の面積を求めなさい。

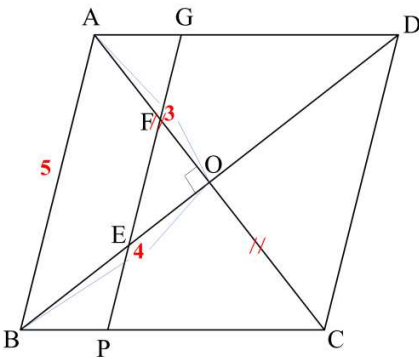


【解答例】

(1) (3点) (完答率 36.1%)

$\triangle ABC$ と $\triangle FPC$ において、
 $AB \parallel GP$ より、平行線の同位角は等しいから、
 $\angle ABC = \angle FPC$ $\angle BAC = \angle PFC$
2組の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle ABC \sim \triangle FPC$

(2) ① (2点) (正答率 46.9%)



ひし形なので対角線は垂直に交わる。
また、ひし形は平行四辺形でもある
ので、対角線はそれぞれの中点で交
わる。

よって、 $AO = 3$ cm, $AB = 5$ cm とな
るから、三平方の定理より、

$$BO = \sqrt{25 - 9} = 4 \text{ cm}$$

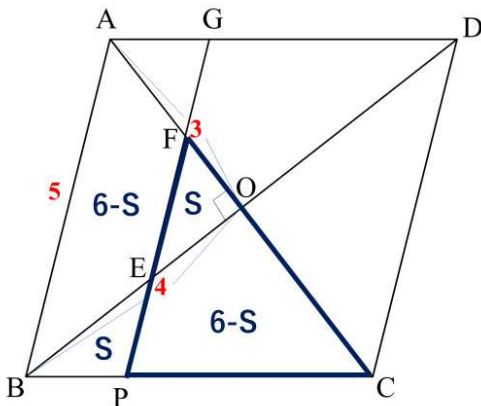
【コメント】

毎年平面図形関連でとんでもない難問を出してくる大分県ですが、今年
度の問題は、2020、2019年度に比べれば計算は楽です（簡単とは言ってい
ない）。(1)は教科書レベルの問題ですが、最後の大問なのと、証明自体書
くの諦めている生徒が多いでしょう。(2)は良い問題です。ひし形の性質
「対角線がそれぞれ中点で垂直に交わる」を知っているか、三平方の定理
を使えるかを聞いています。教科書や定期テストをしっかり頑張っている
子は難なく解けますが、受験に効率を求めすぎるとたぶん解けない。(3)
は、昨年一昨年に比べると計算は簡単ですが「 $\triangle BPE = \triangle EOF$ 」という条件
を上手く使えるかで明暗が分かります。何となく平行な線たくさん出てく
るので、等積変形したくなりますが、本当、素直に使えるかどうか。素直
に覚えて、 $\triangle CPF = 6$ と気づけても、相似の計算地味に計算メンドイです。
中学生には苦しい。でも条件の使い方など、1度は解きたい難問。

(2) ② (3点) (正答率 0.1%)

Point1 $\triangle BPE = \triangle EOF$ という条件を素直に使う

Point2 可能な限り補助線は引かない



$\triangle ABO$ と $\triangle CBO$ の面積は 6 cm^2 なので、 $\triangle BPE = \triangle EOF = S$ とすると、四角形 $OEPC$ は $6 - S$ 、よって、 $\triangle CPF$ の面積は、 $6 - S + S = 6 \text{ cm}^2$ となる。

$\triangle CPF \sim \triangle CBA$ で、面積比は $1 : 2$ となるから (※)、
 $PF^2 : BA^2 = 1 : 2$ より、
 $PF = \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ cm}$ となる。

すると、四角形 $ABPG$ は平行四辺形なので、 $PG = 5 \text{ cm}$ だから、

$GF = 5 - \frac{5}{\sqrt{2}}$ $\triangle CPF \sim \triangle AGF$ だから、面積比は、

$$\triangle CPF : \triangle AGF = \left(\frac{5}{\sqrt{2}} \right)^2 : \left(5 - \frac{5}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1^2 : (\sqrt{2} - 1)^2 = 1 : (3 - \sqrt{2})$$

$$\triangle AGF = 6 \times (3 - \sqrt{2}) = \mathbf{18 - 12\sqrt{2} \text{ cm}^2}$$
 大体 1.029 cm^2

(追記※) $CP^2 : CA^2 = 1 : 2$ より、 $CP : CA = 1 : \sqrt{2}$ 、よって、
 $CP : PB = 1 : (\sqrt{2} - 1)$ となる。 **$PB = AG$ なので**、 $\triangle CPF$ と $\triangle AGF$ 相似比は
 $1 : (\sqrt{2} - 1)$ となるから、面積比は $1^2 : (\sqrt{2} - 1)^2 = 1 : (3 - \sqrt{2})$

長さを出さなくても相似比が分かる！ 気づけば楽。