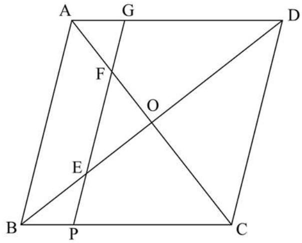
芸術的な高校入試第 56 回	
美しさ：★★★★★★	難易度：★★★★★★

出典：2021 年　大分県

下の図のように，ひし形 ABCD があり，対角線 BD と対角線 AC の交点を O とする。また，辺 BC 上に点 P があり，点 P を通り辺 AB に平行な直線と，対角線 BD，対角線 AC，辺 AD との交点をそれぞれ E，F，G とする。ただし，点 P は，頂点 B または頂点 C と一致しない。

次の（1），（2）の問いに答えなさい。

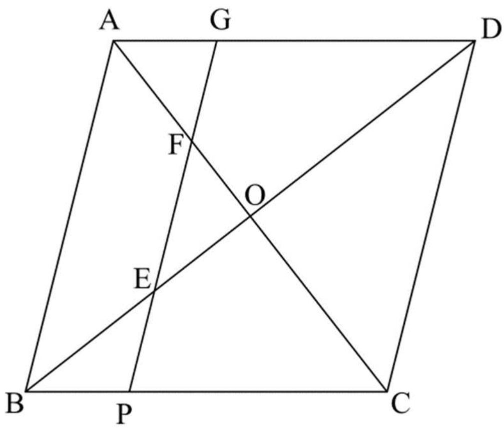


（1）△ABC∽△FPC であることを証明しなさい。

（2）AB＝5 cm，AC＝6 cm とする。また，△BPE の面積と△EOF の面積が等しくなるように点 P をとる。次の①，②の問いに答えなさい。

① 線分 BO の長さを求めなさい。

② △AFG の面積を求めなさい。

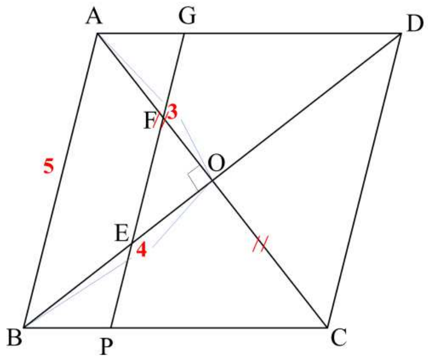


【解答例】

（1）（3 点）（完答率 36.1%）

△ABC と△FPC において，
AB//GP より，平行線の同位角は等しいから，
∠ABC＝∠FPC　∠BAC＝∠PFC
2 組の角がそれぞれ等しいので，△ABC∽△FPC

（2）①（2 点）（正答率 46.9%）



ひし形なので対角線は垂直に交わる。また，ひし形は平行四辺形でもあるので，対角線はそれぞれの中点で交わる。

よって，AO＝3 cm，AB＝5 cm となるから，三平方の定理より，

$BO = \sqrt{25-9} = \mathbf{4\ cm}$

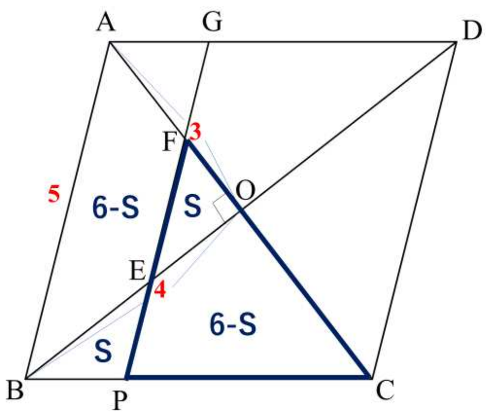
【コメント】

毎年平面図形関連でとんでもない難問を出してくる大分県ですが，今年度の問題は，2020，2019 年度に比べれば計算は楽です（簡単とは言っていない）。（1）は教科書レベルの問題ですが，最後の大問なのと，証明自体書くの諦めている生徒が多いでしょう。（2）は良い問題です。ひし形の性質「対角線がそれぞれ中点で垂直に交わる」を知っているか，三平方の定理を使えるかを聞いています。教科書や定期テストをしっかり頑張っている子は難なく解けますが，受験に効率を求めすぎるとたぶん解けない。（3）は，昨年一昨年に比べると計算は簡単ですが「△BPE＝△EOF」という条件を上手く使えるかで明暗が分かれます。何となく平行な線たくさん出てくるので，等積変形したくなりますが，本当，素直に使えるかどうか。素直に使えて，△CPF＝6 と気づけても，相似の計算地味に計算メンドイです。中学生には苦しい。でも条件の使い方など，1 度は解きたい難問。

（2）②（**3** 点）（正答率 **0.1**%）

<u>**Point1**　△BPE＝△EOF という条件を素直に使う</u>

<u>**Point2**　可能な限り補助線は引かない</u>



△ABO と△CBO の面積は 6 cm^2 なので，△BPE＝△EOF＝S とすると，四角形 OEPC は 6－S，よって，△CPF の面積は，

6－S＋S＝6 cm^2 となる。

△CPF∽△CBA で，面積比は 1 : 2 となるから（※），

$PF^2 : BA^2 = 1 : 2$ より，

$PF = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$ cm　となる。

すると，四角形 ABPG は平行四辺形なので，PG＝5 cm だから，

$GF = 5 - \dfrac{5}{\sqrt{2}}$　△CPF∽△AGF だから，面積比は，

$$\triangle CPF : \triangle AGF = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 : \left(5 - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1^2 : \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = 1 : \left(3 - \sqrt{2}\right)$$

$\triangle AGF = 6 \times \left(3 - \sqrt{2}\right) =$ $\mathbf{18 - 12\sqrt{2}\ cm^2}$　大体 1.029 cm^2

（追記※）$CP^2 : C\overset{B}{\cancel{A}}{}^2 = 1 : 2$ より，$CP : C\overset{B}{\cancel{A}} = 1 : \sqrt{2}$，よって，

$CP : PB = 1 : (\sqrt{2} - 1)$ となる。<u>**PB＝AG なので**</u>，△CPF と△AGF 相似比は

$1 : \left(\sqrt{2} - 1\right)$ となるから，面積比は $1^2 : \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = 1 : \left(3 - \sqrt{2}\right)$

長さを出さなくても相似比が分かる！　気づけば楽。

【作成】高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/