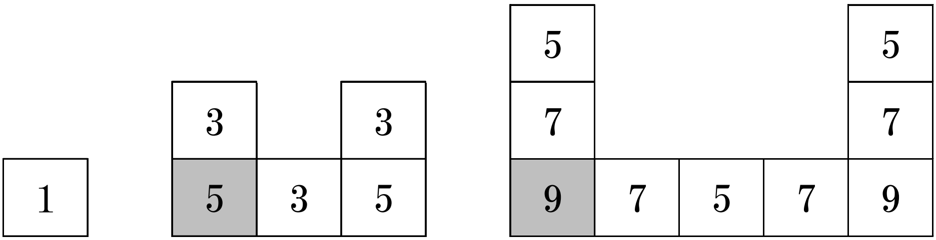
芸術的な高校入試第 57 回	
美しさ：？？？？？？？	難易度：★★★★☆☆

出典：2021 年度　立命館慶祥高校

　下の図のように，奇数が書かれた正方形をある規則にしたがって並べて図形をつくり, 2 番目以降の図形は, 図形の左下にある正方形に色を塗る。このとき，次の問いに答えなさい。

1 番目　　2 番目　　3 番目



(1) 4 番目の図形において, 色を塗った正方形に書かれた数を求めなさい。

(2) n 番目の図形において，色を塗った正方形に書かれた数を，n を用いた式で表しなさい。

(3) 1 番目の図形から 50 番目の図形において，109 と書かれた正方形は全部で何個あるか，求めなさい。計算過程も解答欄に書きなさい。

【解答例】

(1)（4 点）

7						7
9						9
11						11
13	11	9	7	9	11	13

図形の左上の数は，1，3，5，7……と，n 番目で $2n-1$ となっている。4 番目では 7。
n 番目では，図形の行が n ある。
4 番目では 4 行あるので，7，9，11，13。
答えは **13**。

(2)（5 点）

$\boxed{2n-1}$

⋮

2を n-1回加える

⋮

$\boxed{4n-3}$

どう考えても 1→5→9→13 と 4 ずつ増えているので，
$4n-3$

真面目にやるなら，
左上の数から，2 を $n-1$ 回加える，つまり，
$2n-1+2(n-1)$　を計算すればよいので，
答え **$4n-3$**

(3)（7 点）

$109=4\times28-3$ なので，28 番目の色の塗った正方形の数が 109 となるので，28 番目で 109 と書かれた図形は 2 個ある。
n 番目の図形の左上の数は $2n-1$ で表されるので, $2n-1=109$ とすると，$n=55$ となる。55 番目の図形で 109 が 3 個あり，29～54 番目では 109 が 4 個ある。
したがって，1～50 番目の図形において，109 は，
$2+(50-29+1)\times4=2+22\times4=$**90 個**ある。

＜公式解答＞$4n-3=109$，$4n=112$，$n=28$ より，28 番目の図形には，109 と書かれた正方形は 2 個ある。50 番目の図形の左上の正方形に書かれた数は，$2\times50-1=99$，50 番目の図形の色を塗った正方形に書かれた数は，$4\times50-3=197$　だから，29 番目の図形から 50 番目の図形では，109 と書かれた正方形は 4 個ずつある。したがって，求める個数は，$2\times1+4\times(50-29+1)=$**90**

【コメント】

学校の授業では扱われづらい規則性問題です。何となく，都立西の大問4を，北海道レベルにした，そんな感じの問題。

（1），（2）は，立命館慶祥受けるような中学生なら，すんなり解答できると思われます。たぶん。真面目に考えないなら小学生でも余裕で解ける。

問題は（3）です。そこまで難しくはない問題ですが，記述式なので「どこまで書けば良いのか，書かなくてよいのか」結構迷うと思われます。例えば「どうして29～50番目には109が4個と言えるのか」まで説明すると大変（公式解答を見ると，それは明らかとしてよい）。

また，28番目の次29番目は109何個だ……？と考えてしまうと泥沼にはまるので，先に端の50番目（55番目）を考えて，29～50番目は4個と考えた方が良いですね。問題は易しいですが「自分に都合よく考える」能力が求められる問題だと思われます。

※（3），自学だけで高校入試突破しようとしている中学生は，中々記述解答を見てもらえる機会が無いので，しんどそう。忙しくて申し訳ないかもだけど，自学だけで突破するなら，中学校の先生に***丁寧に***「記述解答見ていただけないでしょうか」とお願いした方がよさそう。

なお，メールフォームで貰って気づいたのですが，この問題はもっと深く味わうことが出来ます（次ページ）。深く味わうと，めちゃんこ良問になります。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/

【追記：おまけ問題】

m を 1 以上の自然数とします。$2m-1$ と書かれた正方形は $2m-1$ 個あることを示しなさい（恐らく中学生には相当厳しい）。

【解答例】

I）$m=1$ の場合

図形 1 より，1 と書かれた正方形は 1 個ある。

II）$m=2$ の場合

図形 2 より，3 と書かれた正方形は 3 個ある。

III）$m=2n-1$（$n\geqq 2$），すなわち $2m-1=4n-3$（5，9，13……）の場合

n 番目の色を塗った正方形に書かれた数で，n 番目では 2 個ある。

これらの数が，図形の左上の数となるのは，k 番目の図形の左上の数は

$2k-1$ と表されるので，$2k-1=4n-3$　$k=2n-1$　より，

$2n-1$ 番目の図形となる。よって，n 番目で 2 個，$n+1$ 番目から $2n-2$ 番目では 4 個，$2n-1$ 番目では 3 個となるから，

$2+4(2n-2-(n+1)+1)+3=2+4n-8+3=4n-3$ 個

となり，$4n-3$ と書かれた正方形は，$4n-3$ 個ある。

IV）$m=2n$（$n\geqq 2$），すなわち $2m-1=4n-1$（7，11，15……）の場合

$n+1$ 番目の色を塗った正方形の 1 段上の正方形に書かれた数で，$n+1$ 番目では 4 個ある。これらの数が図形の左上の数となるのは，

$2k-1=4n-1$　$k=2n$　　$2n$ 番目の図形である。

$n+1$ 番目から $2n-1$番目では 4 個，$2n$ 番目で 3 個となるから，

$4(2n-1-(n+1)+1)+3=4(n-1)+3=4n-1$

となり，$4n-1$ と書かれた正方形は，$4n-1$ 個ある。

I）～IV）より，$2m-1$ と書かれた正方形は $2m-1$ 個ある。

【追加コメント】

入試問題（3）が，1 番目の図形から 50 番目の図形と，～50 番目となっているのは，「すべての図形において」とすると，
1 は全部で 1 個，3 は全部で 3 個，5 は全部で 5 個，7 は全部で 7 個……109 も全部で 109 個！
と，何も考えなくても解けてしまう（勘で当たる）からだと思われます（まあでも記述式だから問題ない気もするが……いや，1 で 1 個，3 で 3 個……だから, 109 でも 109 個とか書く解答多くなりそうだから阻止したんだな, きっと)。

$2m-1$ で，$m=2n-1$（$n\geqq 2$）とすると「n 番目の色を塗った正方形に書かれた数」「$2n-1$ 番目で 3 個となり終了」，$m=2n$（$n\geqq 2$）とすると「$n+1$ 番目の色を塗った正方形の 1 段上の正方形に書かれた数」「$2n$ 番目で 3 個となり終了」と，よく見ると同じ数字がたくさんあるのも，何となく嬉しいですね（？）

札幌では一般化した証明問題は出せませんが，東京開成とか灘とかなら出せそう。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/