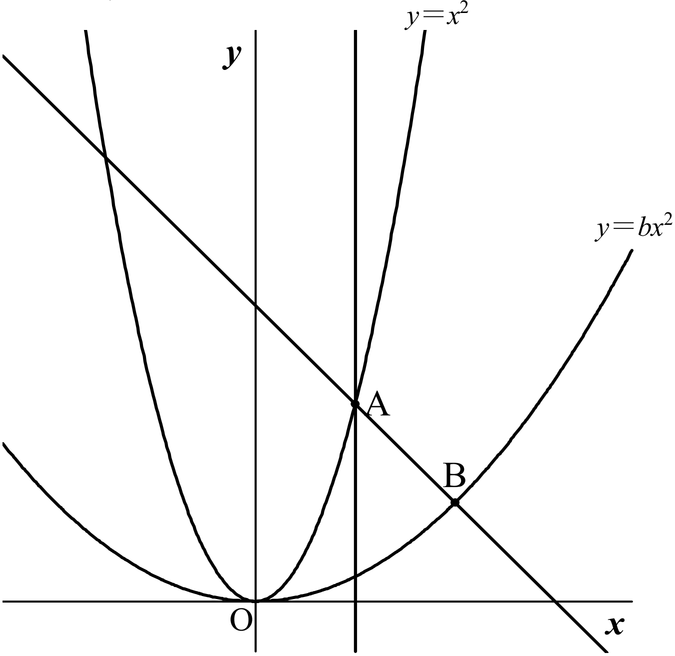
芸術的な高校入試第 58 回	
美しさ：★★★★☆☆	難易度：★★★★★☆

出典：2019 年度　灘高校

a，b は $a>1$，$0<b<1$ を満たす定数とする。$y=x^2$ のグラフと直線 $x=a$ との交点を A とし，点 A を通り傾きが -1 の直線と，$y=bx^2$ のグラフの $x>0$ の部分との交点を B とする。△OAB が，OA＝OB の二等辺三角形で，その面積が 6 のとき，次の問いに答えよ。

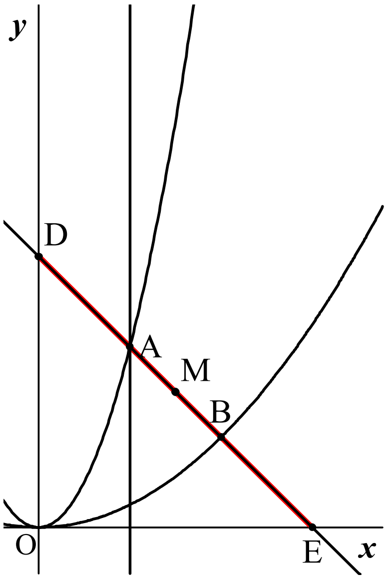


（1）a，b の値を求めよ。

（2）$y=bx^2$ のグラフの $x<0$ の部分に点 C をとると，△OAC の面積が 6 となった。点 C の x 座標を求めよ。

【解答例】※あくまでも例です，ここにある解答が最適とは限りません。

（1）（5 点×2）



点 A$\left(a, a^2\right)$と置ける。

点 A を通り傾きが－1 の直線 l と，y 軸，x 軸との交点をそれぞれ D，E とする。

直線 l：$y=-x+a^2+a$より，

D$\left(0, a^2+a\right)$，E$\left(a^2+a, 0\right)$

△OAB は二等辺三角形なので，AB の中点を M とすると，この M は DE の中点でもあるので，M$\left(\dfrac{a^2+a}{2}, \dfrac{a^2+a}{2}\right)$

すると，B$\left(a^2, a\right)$となる。

(A と B の x 座標の和)÷2＝M の x 座標となっている，y 座標も同様。または（※1）

△OAB において，面積は，$\dfrac{1}{2}\times$AB$\times$OM で求められる。

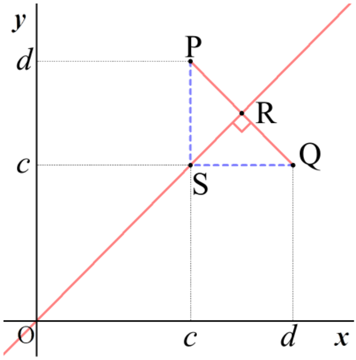
$\mathrm{AB}=\sqrt{2(a^2-a)^2}=\sqrt{2}\left(a^2-a\right)$，$\mathrm{OM}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(a^2+a\right)$であるから，

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\left(a^2-a\right)\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(a^2+a\right)=\dfrac{1}{2}\left(a^4-a^2\right)=6$　または(※2)

$a^4-a^2-12=0$　$\left(a^2-4\right)\left(a^2+3\right)=0$　$a>0$ より，$\boldsymbol{a=2}$

このとき，B(4, 2)だから，$\boldsymbol{b=\dfrac{1}{8}}$

※1**Point**



点(c,d)を，$y=x$ に関して対称移動させた点は，(d,c)である。

左図で, 点 P と点 Q は $y=x$ に関して対称, PQ の中点を R とすると，PR＝RQ，OR ⊥PQ である。S(c,c)とすると，△SPR≡△SQR，SP＝SQ となるから，P(c,d)のとき，Q(d,c)である。

これを利用すると，点 A，B は $y=x$ に関して対称なので，A(a,a^2)のとき，B(a^2,a)とすぐ分かる。

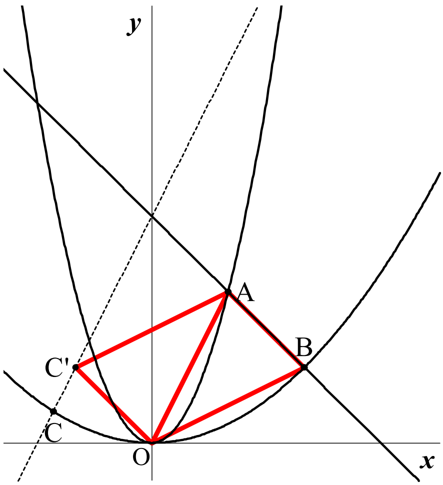
※2**Point**　非推奨　灘なら OK？

クロスチョップ（サラスの公式）　$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$を利用して，

$a>1$ より，$\triangle \mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\left|a^2-a^4\right|=\frac{1}{2}\left(a^4-a^2\right)=6$

| 　|は絶対値にしろという記号

（2）（8 点）



四角形 OC'AB が平行四辺形となるように点 C'をとると，C'$(-2,2)$となる。△OAB＝△OAC'＝△OAC なので，点 C'を通り, OA に平行な直線 (傾き 2)

と $y=\frac{1}{8}x^2$ との交点を求めればよい。

$\frac{1}{8}x^2=2x+6 \quad x^2-16x-48=0$

$x<0$ より，$x=\mathbf{8-4\sqrt{7}}$

※C'の取り方は色々ある。好きなやつで。

【コメント】

（1）は灘，難関私立の高校入試らしく，中点や対称など（対称は知らなくても解けるけど）の知識，また工夫計算が要求される問題です。とはいえ，1 つ 1 つは，一般的な中学校の定期テストで 1 回は見たことあるであろう知識なので，そんな無理難題ではない（基本的な知識を何個も何個も組み合わせているから難しくなっている）。a^4 あるから，公立では出せないけど。良い機会なので，$y=x$ に対称な点，覚えておきましょう。サラスの公式はまあ，中学生がこれ使う場合，絶対値の扱いで嫌になるので，辞めておこう。

（2）は，（1）が解けた人に対するサービス問題です。これ単体なら公立高校でも出せますね。とりあえず等積変形しておけば何とかなります。私は最初に平行四辺形を思いついたのでそれでやりましたが, 1 番速いのは, DA＝AB なので，点 D から傾き 2 の直線引く方法です。まあ思いついたら何でも良いと思う。またはこれこそサラスの公式使っても良いかも。あでもどうだろう，記述式，減点される？されない？灘受験レベルなら皆覚えてそうだよね。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/