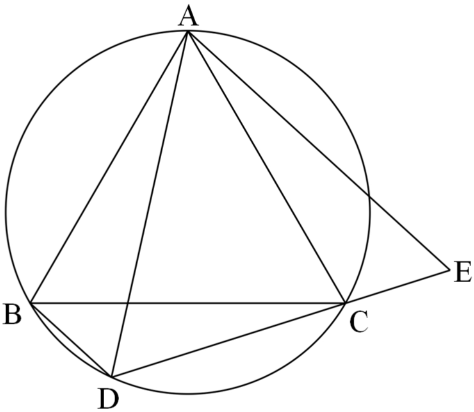
芸術的な高校入試第 60 回	
美しさ：★★★★☆☆	難易度：★★★★★☆

出典：1981 年度　茨城県

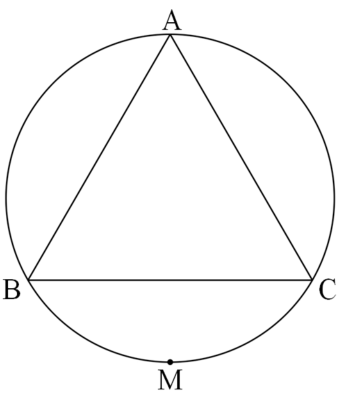
円 O に内接する正三角形 ABC がある。いま，図のように弧 BC 上に点 D をとり，弦 DC をのばして，その延長線上に点 E を BD＝CE となるようにとって，A と D，A と E を結ぶ。次の（1）～（3）の問いに答えなさい。



（1）∠BDA の大きさを求めなさい。

（2）∠BDA＝∠CEA であることを証明しなさい。

（3）弧 BC の中点を M とする。点 D が点 B を出発して弧 BM 上を点 M まで動くとき，点 E はある線をえがきながら動く。点 E のえがく線を，定規とコンパスと使って作図しなさい。



【解答例】

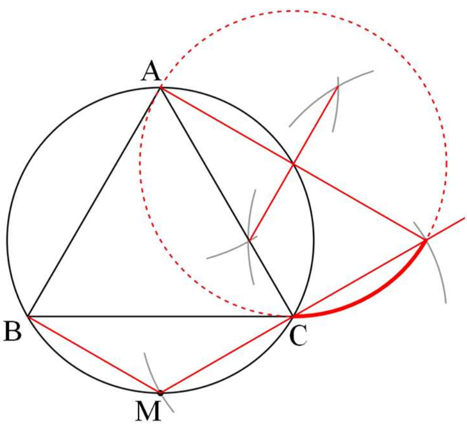
（1）（4 点）（正答率 71.0%）

弧 AB に対する円周角なので，∠BDA＝∠BCA＝**60°**

（2）（7 点）（完答率 14.8%）※[1] 入試では穴埋めであった

△ABD と△ACE において，
仮定より，AB＝AC…①【1 点】　BD＝CE…②【1 点】
弧 CD に対する円周角だから，∠CBD＝∠CAD
弧 AC に対する円周角だから，∠CBA＝∠CDA
∠ABD＝∠CBD＋∠CBA
三角形外角はそれと隣り合わない 2 つの内角の和に等しいから，
∠ACE＝∠CAD＋∠CDA
よって，∠ABD＝∠ACE…③【3 点】（※[1]）
①～③より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，
△ABD≡△ACE【1 点】
したがって，∠BDA＝∠CEA【1 点】

（3）（5 点）（正答率 3.9%）



（1），（2）の誘導より，<u>**常に∠CEA=60°**</u> である。よって，3 点 A，C，E は同一円周上にある（弧 AC に対する円周角∠CEA は常に 60°）。よって，

①直線 MC 上に，CM＝CE となる点をとる。

②（∠ACM＝∠ACE＝90° なので）線分 AE の垂直二等分線を引けば，円の中心が求まる。円を描く。

「E が描く線」なので，弧 CE の部分だけ濃く書いたり（分かりやすく）すると良い。

（※1）
円に内接する四角形の内角の和は 180°であることから，

円に内接する四角形の内角の和は 180°なので， ∠ABD＝180°－∠ACD また，∠ACE＝180°－∠ACD　であるから∠ABD＝∠ACE

とした方が何倍も速い。1981 年での模範解答もこちらである。ただ，今は一応，中学範囲外（発展内容となっている）。大抵の入試なら大丈夫（減点されない）だと思われる。

【コメント】

（1）（2）が，綺麗に（3）への誘導になっている問題です。「E が描いてできる線の長さを求めなさい」ならよくある問題ですが「作図しなさい」は珍しいかもしれません。誘導に乗ればとても簡単な問題ですが，正答率を見るに，誘導に乗り切れなかった中学生が多かったような気がします。大学入試では「誘導に上手く乗る」ことが合格への近道ですが，高校入試でもたまにそういうことあります。いや北海道や愛知県以外のほとんどの都府県の入試は誘導が命か。誘導に乗る練習もしておくと良いです。

(2) は「円に内接する四角形の内角の和は 180°」を用いると余裕です。たぶん高校入試でも断りなしに用いて良いと思われます。もちろん，使わずに証明も可能です。

（1）みたいな問題，正答率 90%超えるかと思いきや，意外に 71%。いつの時代も，どの都道府県も，正答率こんなもんでしょうね。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/