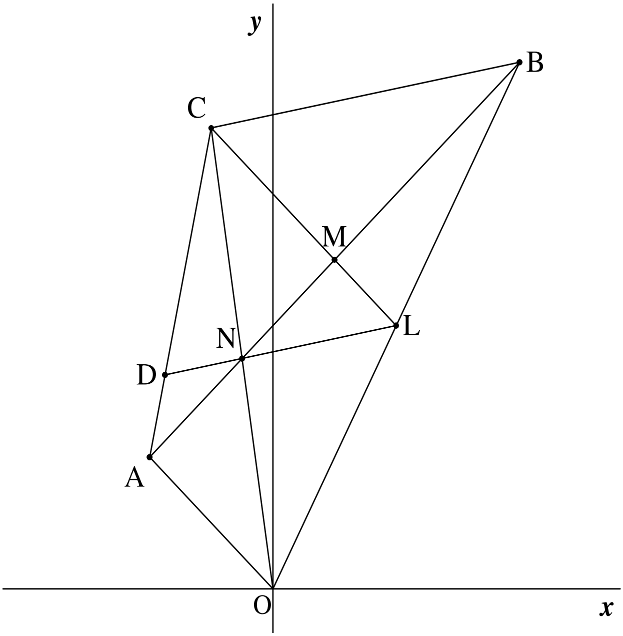
芸術的な高校入試第 61 回	
美しさ：★★★★★☆	難易度：★★★★★☆

出典：2014 年度　洛南高校

図のように，原点 O と 2 点 A（−2, 2），B（4, 8）がある。線分 OB の中点を L，線分 AB の中点を M，線分 AM の中点を N とし，直線 ON と LM との交点を C とする。このとき，次の問いに答えよ。



（1）C の座標を求めよ。

（2）△OBC の面積を求めよ。

（3）直線 LN と AC との交点を D とするとき，

（ア）LN : ND を最も簡単な整数の比で表せ。

（イ）四角形 OLDA の面積を求めよ。

【解答例】

（**1**）（**5** 点）

暗記

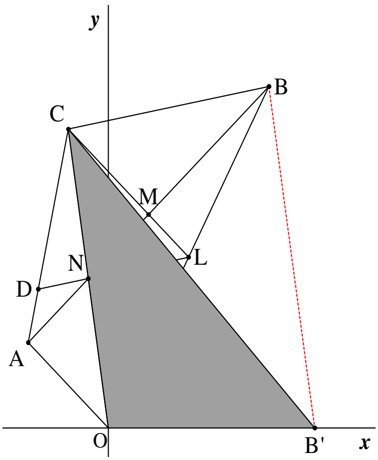
点$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$の中点は，$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

※$\left(\dfrac{x\text{座標の和}}{2}, \dfrac{y\text{座標の和}}{2}\right)$のように，言葉で覚えた方が良い。

$\mathrm{L}(2,4), \mathrm{M}(1,5), \mathrm{N}\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$ であるから，

直線 ON：$y=-7x$　直線 LM：$y=-x+6$であるから，この 2 つの式を連立した方程式を解いて，$\mathbf{C(-1,7)}$

（**2**）（**5** 点）



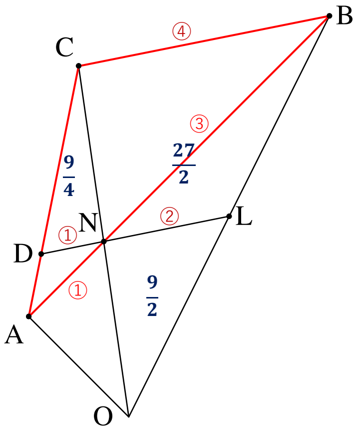
点 B を通り，直線 OC に平行な直線の式は，$y=-7x+36$，この直線と x 軸との交点の座標は，$\mathrm{B}'\left(\dfrac{36}{7}, 0\right)$

等積変形より，

$\triangle\mathrm{OBC} = \triangle\mathrm{OB'C} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{36}{7}\times 7 = \mathbf{18}$

（3）（ア）（イ）（5 点×2）

（解答例 1）



点 N は OC の中点なので，中点連結定理より，BC//LN なので，△ABC で，ND//BC

$A(-2,2), N\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right), B(4,8)$　この 3 点は一直線上にあり，

点 A と点 N の x 座標の差が $\frac{3}{2}$

点 N と点 B の x 座標の差が $\frac{9}{2}$　（※[1]）

なので，AN：NB＝3：9＝1：3，　ND//BC だから，BC：ND＝4：1

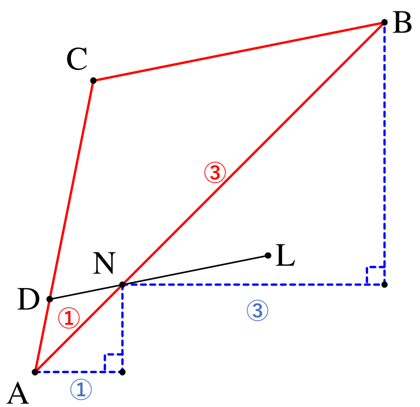
BC：LN＝4：2 であるから，**LN：ND＝2：1**

$\triangle ONL = 18\times\frac{1}{4}=\frac{9}{2}$，四角形 NLBC $=\frac{27}{2}$，　$\triangle CDN=\frac{27}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{9}{4}$

$\triangle OAC = 6$（頑張って求めて）だから，四角形 OADN $=6-\frac{9}{4}=\frac{15}{4}$

四角形 OLDA ＝$\triangle$ ONL＋四角形 OADN $=\frac{9}{2}+\frac{15}{4}=\mathbf{\frac{33}{4}}$

（※[1]）



左図のように，垂線引いて，相似な三角形を作れば，x 座標の差（または y 座標の差）が，AN：NB になるのかが分かる。

（※2）

点$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$を$m:n$に内分する点は$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

という公式が一応あるので，

$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2}\right)=\left(\dfrac{-2n+4m}{m+n},\dfrac{2n+8m}{m+n}\right)$　としても良い？かなり面倒だけど。

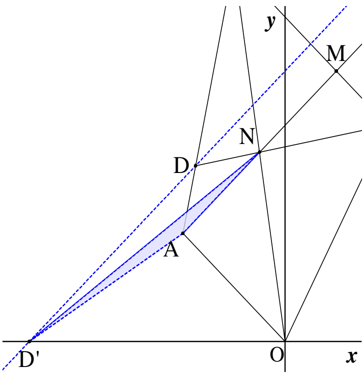
（解答例 2）

直線 LN: $y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{18}{5}$　直線 AC: $y=5x+12$

この 2 つを連立した方程式を解いて，D$\left(-\dfrac{7}{4},\dfrac{13}{4}\right)$

L と N のx座標の差 $\dfrac{5}{2}$，N と D のx座標の差 $\dfrac{5}{4}$であるから，

LN：ND＝2：1



四角形 OLDA＝四角形 ONDA＋△ONL

$\triangle$ ONL $=18\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{2}$

点 D から直線 AB に平行な直線を引き，x軸との交点を D’とする。

直線 DD’：$y=x+5$なので，D’$(-5,0)$

四角形 ONDA＝△OD’N－△OD’A

$=\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{7}{2}-\dfrac{1}{2}\times5\times2=\dfrac{35}{4}-5=\dfrac{15}{4}$

四角形 OLDA $=\dfrac{9}{2}+\dfrac{15}{4}=\boldsymbol{\dfrac{33}{4}}$

三角形の面積を求める際

3 点（0, 0），（a, b），（c, d）が作る三角形の面積は，

$\dfrac{1}{2}|ad-bc|$という公式を用いても良い。$|\ |$は絶対値にしろという命令。

【コメント】

（2），（3）は，いくらでも解法があって楽しい問題です。それなりのレベルのクラスや個人生徒相手に授業するとき，とても使える問題。

(1) は「中点の座標の求め方知っていますか？」という知識を問う問題。直線 ON，直線 LM の式も，すんなり出せるような数値設定です。定期テストの最後らへんの問題レベル。

（2）は，好きに三角形の面積求めてください。たぶんこういう問題，等積変形が 1 番速い。BC と y 軸との交点求めて分割三角形も良いかも。

(3) は中 3 なら相似の知識を用いると，それなりに計算が楽になります。もちろん，中 2 の 1 次関数だけの知識を用いてゴリゴリやるのも可。

【追伸】

関数における内分点，中 3 の相似の知識を用いれば楽に理解できますが，これ，本来高校数学 II の範囲ですよね。中学の教科書に載ってたっけ？

とはいえ，全国の公立高校で平気で出題されているのを見るに，中学生の常識だそうです。神奈川県では毎年のように出ていますね。

中学生に教えるのは，相似を習った後がよさそう。1 次関数の分野で教えておけば，この問題は中 2 で解けることになりますね。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/