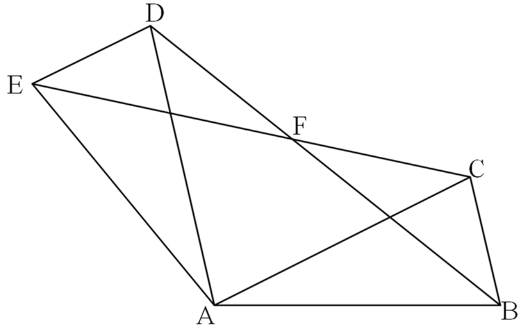
芸術的な高校入試第 63 回		
難易度：★★★★★☆	美しさ：★★★★☆☆	得点　　　　　　/25

出典：2020 年度　八王子東高校

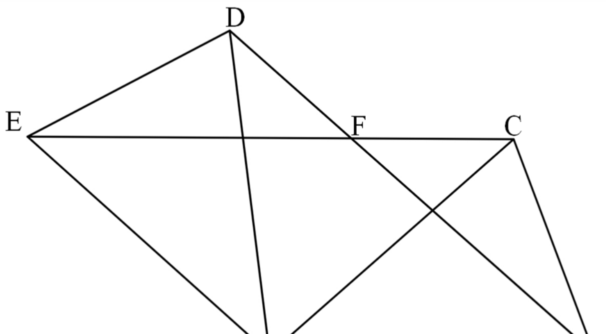
図 1



右の図 1 で，△ABC は頂点 A，B，C がこの順に反時計回りに並び，AB＝AC で，頂角が鋭角の二等辺三角形である。頂点 A を回転の中心とし，△ABC を反時計回りに回転させて△ADE を作る。ただし，∠BAE の大きさは∠BAC の 2 倍より大きく 180° 以下である。△ABC と△ADE において, 頂点 B と頂点 D, 頂点 C と頂点 E をそれぞれ結び，線分 BD と線分 CE の交点を F とする。

次の各問に答えよ。

図 2



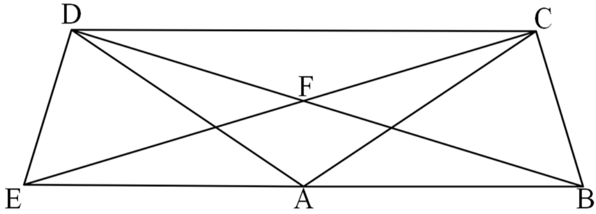
問 1　図 2 は図 1 において，AB//EC である場合を表している。

∠BAC＝40° とするとき，∠CAD の大きさは何度か。

問 2　図 2 において，△BCF≡△EDF であることを証明せよ。

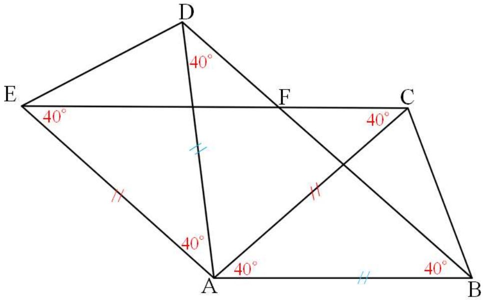
問 3　図 3 は，図 1 において 3 つの頂点 B，A，E が一直線上にあり，頂点 C と頂点 D を結び，BE//CD とした場合を表している。AB＝2 cm, ∠BAC＝30° であるとき，四角形 BCDE の面積は何 cm^2 か。

図 3



【解答例】

問 1（7 点）



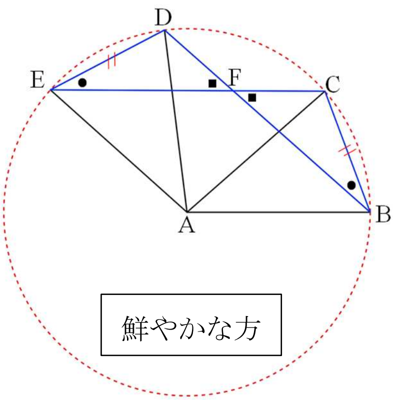
△ABD≡△ACE であること，AB//EC であることを利用する。

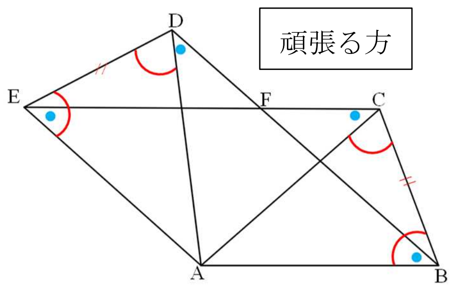
∠CAD＝60°

問 2（10 点）

（鮮やかな解法）

△BCF と△EDF において，
対頂角は等しいから，∠BFC＝∠EFD…①
△ABC と△ADE は合同だから，BC＝ED…②
また，AB＝AC＝AD＝AE であり，B，C，D，E は点 A を中心とする一つの円の周上にあるから，円周角の定理を用いて，∠CBF＝∠DEF…③
①③および，三角形の内角の和は 180° であるから，残りの角も等しいので，∠BCF＝∠EDF…④
②③④より，一組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△BCF≡△EDF





（円周角思いつかなかった人用）

△ABD と△ACE において，

仮定より，AB＝AC＝AD＝AE…①　∠BAC＝∠DAE

∠BAD＝∠BAC＋∠CAD，∠CAE＝∠DAE＋∠CAD　なので，∠BAD＝∠CAE…②

①，②より 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，△ABD≡△ACE

このことと，二等辺三角形の底角は等しいことから，∠ABD＝∠ADB＝∠ACE＝∠AEC

仮定と，二等辺三角形の底角は等しいことから，∠ABC＝∠ACB＝∠ADE＝∠AED

△BCF と△EDF において，

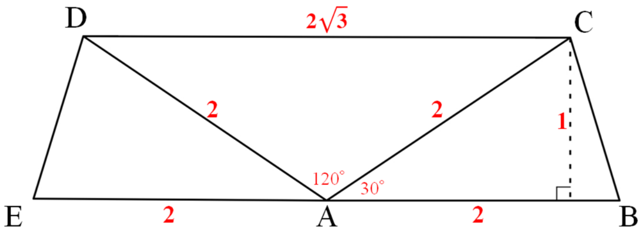
∠BCF＝∠ACE＋∠ACB，∠EDF＝∠ADB＋∠ADE　よって∠BCF＝∠EDF…③

∠CBF＝∠ABC－∠ABD，∠DEF＝∠AED－∠AEC　よって∠CBF＝∠DEF…④

また，仮定より，BC＝ED…⑤

③，④，⑤より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，△BCF≡△EDF

問 3（8 点）



$$\triangle \mathrm{ABC} = \triangle \mathrm{ADE} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1, \quad \triangle \mathrm{ACD} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$$

よって，四角形 BCDE＝$(2+\sqrt{3})$ cm^2

【コメント】

問 3 が一番簡単です。問 1，問 2 は，円周角に気づくと（しかし，気づき方が特殊な状況ではある，中々見ない）鮮やかに，記述量少なめで解くことが出来ます。気づかずに，△ABD≡△ACE を利用すると，恐ろしいことが起きます。解けるけど。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/