芸術的な高校入試第 64 回

難易度：★★★★★★	美しさ：★★★★★☆

出典：2011 年度　渋谷教育学園幕張（高校入試）

下の図 I は一辺の長さが 2 cm の正三角形 4 つでできた正四面体 A—BCD である。下の図 II は図 I の正四面体を 3 辺 AB，AC，AD で切り離し，側面であった 3 つの正三角形 ABC，ACD，ADB を開いた図である。図 II において，3 点 A，A’，A”は図 I の点 A であった点である。AB⊥BC，A’B⊥BD，A”C⊥BC のとき，3 点 A，A’，A”を線分で結び，立体 AA’A”—BCD をつくる。次の各問いに答えなさい。

図 I

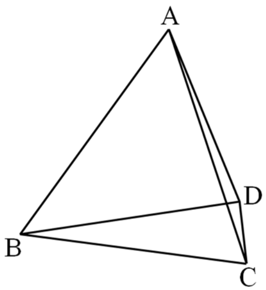
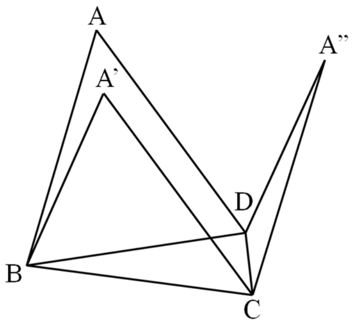


図 II



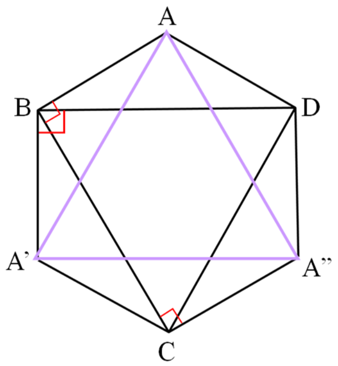
（1）立体 AA’A”—BCD の辺 AA’の長さを求めなさい。

（2）立体 AA’A”—BCD の体積を求めなさい。

【解答例】

（1）（8 点）

図 II を真上から見た平面図（図 I の点 A があった位置から見る図）を描く。



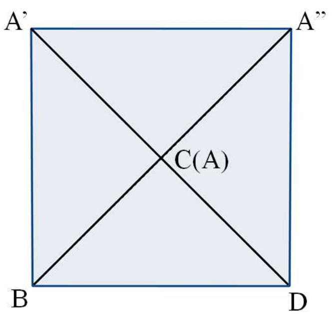
AB⊥BC，A'B⊥BD，A''C⊥BC，

また AB＝AD，A'B＝AC などの条件に注意すると，平面図は左図のようになる。

角度を書き込んでいくと，△AA'A''も正三角形，△AA'A''≡△BCD であることがわかる。

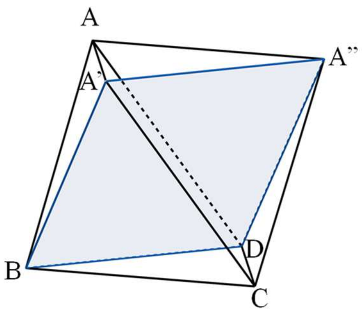
AA'＝2 cm

（2）（10 点）



長方形 A'A''DB は，全ての角が 90° で，全ての辺の長さが 2 cm だから，正方形である（図 II の点 A，または点 C から見る平面図を描けば，正方形に見える，左図 1)。

また，側面の三角形はすべて正三角形なので，正八面体となる（左図 2)。



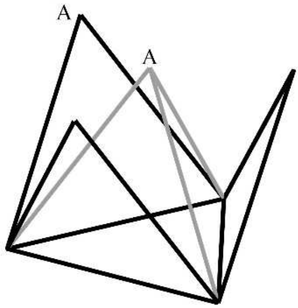
よって求める体積は，

$$\frac{1}{3}\times \text{正方形AA}''\text{DB}\times \text{AC}$$

$$=\frac{1}{3}\times 4\times 2\sqrt{2}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{3}}\ \textbf{cm}^3$$

（※）四角形 AA'CD も正方形なので，AC＝$2\sqrt{2}$ とすぐ出せる。知らなくても正四角錐の高さの出し方知っていれば余裕。

【コメント】



まずこの問題地味に気をつけてほしいのは，図 II の点 A は図 I の点 A とは異なる位置にあることです。問題文読めばすぐ分かりますが，私は最初同じ位置にあると勘違いしていました。こんな勘違いしてはいけません。左図のように A は移動しています。

問題文を正しく読めれば，色々アプローチはあると思われますが，私は平面図を描いて考えました。いかに空間図形を平面でみられるかが勝負です。△BCD を先に描いて，じゃあ点 A，A’，A’’ はどこにいるかな？を考えるとたぶん考えやすい。

後は，正八面体という非常に都合の良い図形になっていることに気がつけば余裕です。正八面体の基本的な問題は，2019 年度沖縄県

https://hokkaimath.jp/blog-entry-148.html

などです。他にもたくさんあると思うけど。

納得いかない方は，Geogebra でこの図形描いたので（借り物だけど）

https://www.geogebra.org/3d/ekuja37b

で色々いじってみてください。色々な方向から見てみよう。線の結び方とかはググってください。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/