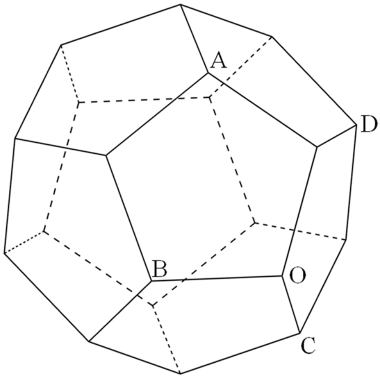
芸術的な高校入試第 67 回	
難易度：★★★★★★	美しさ：★★★★★☆

出典：2021 年度　灘高校（高校入試）

下の図は，1 辺の長さが 2 の正十二面体で，O，A，B，C，D はその頂点である。4 点 A，B，C，D は同一平面上にあり，この平面を P とおく。次の問いに答えよ。なお，線分 AB の長さが $1+\sqrt{5}$ であることは証明なしに用いてよい。

(1) 点 O と平面 P の距離は 1 であることを証明せよ。

(2) この正十二面体を平面 P で 2 つの立体に切り分けたとき，点 O を含む方の立体の体積を求めよ。



【解答例】

（1）（9 点）

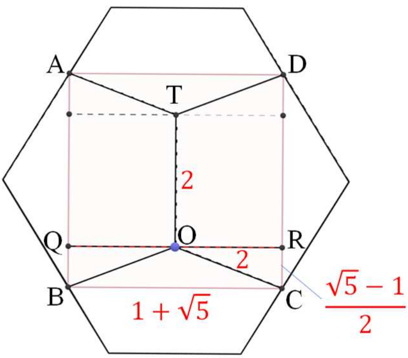
点 O から AB，CD に垂線を下ろし交点を Q，R とする。△OQR は，OQ＝OR の二等辺三角形となり，点 O から QR に垂線を下ろし交点を S とすると，OS の長さが点 O と平面 P の距離となる。
正十二面体を点 O の方から見た下の平面図において, 四角形 COTD は等脚台形である。

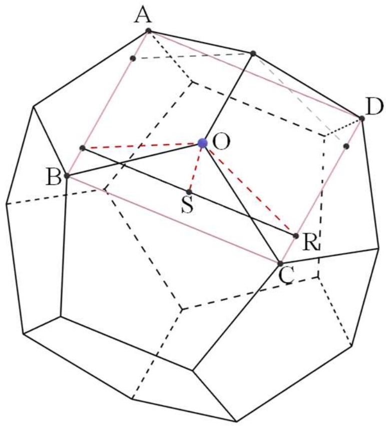
$\mathrm{CR}=\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}-2\right)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ なので，$\mathrm{OR}^2=4-\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$

$\mathrm{SR}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ なので，$\mathrm{SR}^2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\mathrm{OS}^2=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=1$　より，$\mathrm{OS}=1$

したがって，点 O と平面 P の距離は 1 である。

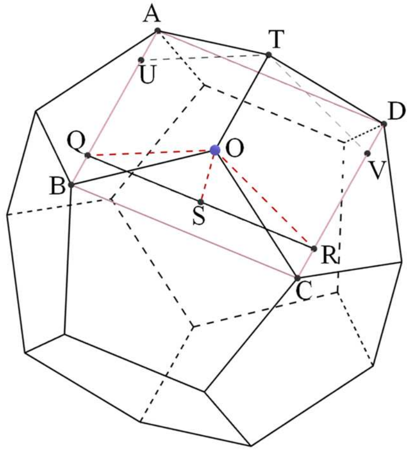




【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/

（2）（9 点）

正十二面体を平面 P で 2 つの立体に切り分けたとき，点 O を含む方の立体は，立体 OT-ABCD となる。
この立体を，右図のように，
四角錐 O-QBCR，三角柱 OQR-TUV，四角錐 T-AUVD と分けて考える。2 つの四角錐は合同である。



四角錐 O-QBCR

$$=\frac{1}{3}\times\left(\sqrt{5}+1\right)\times\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\times 1=\frac{2}{3}$$

三角柱 $\mathrm{OQR}-\mathrm{TUV}=\frac{1}{2}\times\left(1+\sqrt{5}\right)\times 1\times 2=1+\sqrt{5}$

したがって，求める体積は，$\frac{2}{3}+1+\sqrt{5}+\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{7}{3}+\sqrt{5}}$

【コメント】

とてもとても難関私立ぽい問題です。灘はともかく，普通に生きている中高生は，こんな空間図形を見ただけで逃げると思われます。実は見掛け倒しな問題です。普通の公立高校受けるような子でも解いてみてほしい問題。（1）の論証は少し書くの難しいかもだけど，恐らくそれなりに書けてあれば（計算式が書けてあれば）○だと思われます。

なお，解答例では正十二面体を描いていますが，本番の試験で描くとおぞましく時間かかるので，立体 OT-ABCD の部分だけ書いておけば良いです。

日頃から Geogebra で遊んでいると，このような問題も楽しいです。この問題の図も↓で作りましたので，遊んでみてください。特に，上から見るとどうなるか，横から見るとどうなるか，こういうので遊んでおくと，空間図形得意になるかもしれません。

Geogebra：https://www.geogebra.org/m/qwawgagx

とは言っても，大半の中高生はこんなので遊んでいる時間ありませんよね。でもどうせ昨今の学生はスマホ依存なので（注意：子供に限らない，大人も高齢者もスマホ依存である！恐ろしい！）依存するぐらいならこういうので遊んでみてください，スマホ弄っていて親に怒られても「空間図形の勉強しているの！」でごまかせます。たぶん。

なお，この問題は有名な「正十二面体の体積を求める」の途中部分です。問題では正方形 ABCD ができていますが，この正方形の他に 5 つ，合計 6 つの正方形ができます。その正方形を組み合わせると立方体ができるので，正十二面体は，立体 OT-ABCD×6＋立方体の体積で求めることができますね。今回の 1 辺が 2 の正十二面体の場合は，

$$6\times\left(\frac{7}{3}+\sqrt{5}\right)+\left(1+\sqrt{5}\right)^3=14+6\sqrt{5}+16+8\sqrt{5}=30+14\sqrt{5}$$

となります。詳しくは，手元のスマホなりタブレットなりで「正十二面体」とでも検索してみてください。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/