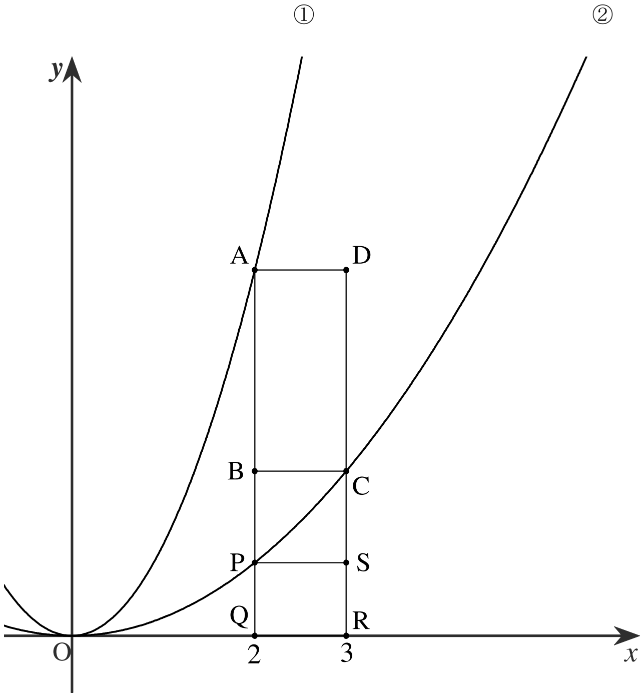
芸術的な高校入試第 68 回	
難易度：★★★★★★★+	美しさ：★★★★★★★+++

出典：2020 年度　福井県 B

関数 $y=x^2$……①，関数 $y=ax^2$（$0<a<1$）……②のグラフがある。直線 $x=2$ と①，②，x 軸との交点をそれぞれ A，P，Q とする。直線 $x=3$ と②，x 軸との交点をそれぞれ C，R とする。また，点 A を通り x 軸に平行な直線と直線 $x=3$ との交点を D，点 P を通り x 軸に平行な直線と直線 $x=3$ との交点を S とし，点 C を通り x 軸に平行な直線と直線 $x=2$ との交点を B とする。このとき，次の問いに答えよ。



（1）$a=\frac{1}{3}$ のとき，線分 CD の長さを求めよ。

（2）長方形 BPSC の面積と長方形 PQRS の面積は等しくならないことを，言葉や数，式などを使って説明せよ。

(3) 下の【説明文】は，a の値を変化させたときの 2 点 C，D の y 座標の大小関係について説明したものである。

【説明文】

$a=$ $\boxed{ア}$ のとき，点 C の y 座標と点 D の y 座標は等しい。

だから，$0<a<$ $\boxed{ア}$ のとき，点 C の y 座標は点 D の y 座標より $\boxed{イ}$。

$\boxed{ア}$ $<a<1$ のとき，点 C の y 座標は点 D の y 座標より $\boxed{ウ}$。

【説明文】の中の $\boxed{ア}$ にあてはまる数を書け。また，$\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$ にあてはまる言葉を書け。

(4) 長方形 ABCD の面積と長方形 PQRS の面積が等しくなるような a の値をすべて求めよ。

(5) 長方形 APSD 全体が，点 B を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の円の内側にあるような a の値のうち，最も小さな値と最も大きな値を求めよ。ただし，長方形全体とは長方形の内部と 4 つの辺をあわせた部分とし，円の内側とは円の内部と円周をあわせた部分とする。

【解答例】

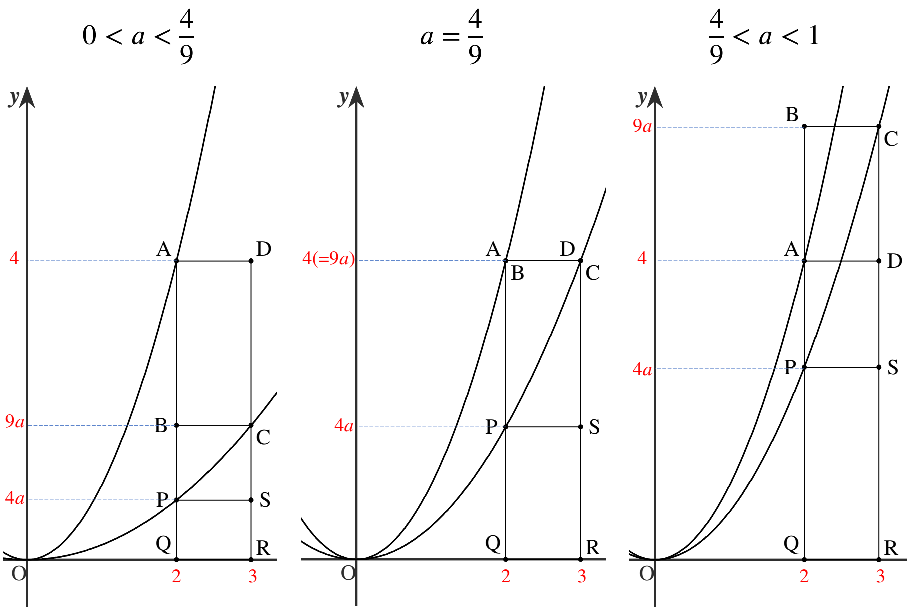
（1）（2 点）（正答率 86.17%）

$a=\frac{1}{3}$のとき，C(3,3)，D(3,4)であるから，CD = 4 − 3 = **1**

（2）（5 点）（正答率 9.22%）

B（2, 9a）C（3, 9a）P（2, 4a）S（3, 4a）で，
長方形 BPSC の面積は，BC×BP＝1×5a＝5a
長方形 PQRS の面積は，PS×PQ＝1×4a＝4a
となり，0＜a＜1 では，5a＞4a（つねに面積比は 5 : 4）であるので，長方形 BPSC の面積と長方形 PQRS の面積は等しくならない。

（3）（5 点）（正答率 52.84%）



点 C の y 座標と点 D の y 座標が等しいとき，9a＝4，これを解いて $a=\frac{4}{9}$

となる。ア，$\mathbf{\frac{4}{9}}$　イ，小さい　ウ，大きい

（4）（4 点）（正答率 3.90%）

長方形 PQRS の面積は，常に $4a$

I) $0 < a < \frac{4}{9}$ のとき，長方形 ABCD $= \mathrm{AB} \times \mathrm{BC} = (4 - 9a) \times 1 = 4 - 9a$

$4 - 9a = 4a$　これを解いて，$\boldsymbol{a = \frac{4}{13}}$　$0 < a < \frac{4}{9}$ を満たしている。

II) $\frac{4}{9} < a < 1$ のとき，長方形 ABCD $= \mathrm{AB} \times \mathrm{BC} = (9a - 4) \times 1 = 9a - 4$

$9a - 4 = 4a$　これを解いて，$\boldsymbol{a = \frac{4}{5}}$　$\frac{4}{9} < a < 1$ を満たしている。

（5）（4 点）（正答率 0.35%）

Point　点 B から最も遠い点 S か点 D との距離を考える！

I)$0 < a < \frac{4}{9}$ のとき，点 B から最も遠いのは点 D か点 S である。

I-ア)点 D が最も遠いときを考える

$\mathrm{BD}^2 = 1 + (4 - 9a)^2 = 81a^2 - 72a + 17$

$\mathrm{BD}^2 = 5$ のとき，$81a^2 - 72a + 12 = 0$　$27a^2 - 24a + 4 = 0$

解の公式で頑張るか，因数分解して，$(9a - 2)(3a - 2) = 0$

$0 < a < \frac{4}{9}$(※1)より，$a = \frac{2}{9}$

$a = \frac{2}{9}$　aが$\frac{2}{9}$より小さいと BD の距離は$\sqrt{5}$を超える。(※3)

I-イ)点 S が最も遠いときを考える

$\mathrm{BS}^2 = 25a^2 + 1$　$\mathrm{BS}^2 = 5$ のとき $25a^2 - 4 = 0$　$0 < a < \frac{4}{9}$ より，$a = \frac{2}{5}$

aが$\frac{2}{5}$より大きいと，BS の距離は$\sqrt{5}$を超える。

最も小さな値は$\boldsymbol{a = \frac{2}{9}}$，最も大きな値は$\boldsymbol{a = \frac{2}{5}}$

非記述式なので上記な感じでも良いが，記述式なら（※1）（※2）も書くべきである。そこまで書ける中学生どれぐらいいるか分からないが……。

（※1）本当の a の範囲

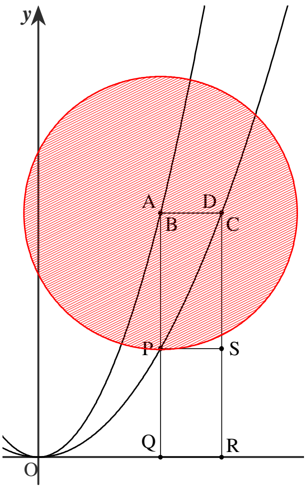
$BD^2 = BS^2$ となるとき，$56a^2 - 72a + 16 = 0$　$7a^2 - 9a + 2 = 0$

解の公式で解くか因数分解して，$(7a-2)(a-1)=0$

$0 < a < \frac{4}{9}$ より，$a = \frac{2}{7}$　よって，$0 < a < \frac{2}{7}$ のとき点 D が最も遠く，

$\frac{2}{7} < a < \frac{4}{9}$ のとき点 S が最も遠い。よって(※1)の範囲はこう書くべき。

（※2）$\frac{4}{9} \leqq a$ のとき



$a = \frac{4}{9}$ のとき，

$BS = \sqrt{1+25a^2} = \sqrt{1+\frac{400}{81}} > \sqrt{5}$ である。

$\frac{4}{9} < a < 1$ でも $\sqrt{1+25a^2}$ が $\sqrt{5}$ よりどんどん大きくなっていく。

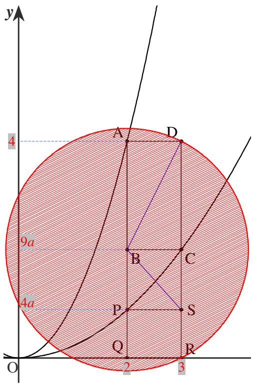
したがって，$\frac{4}{9} \leq a < 1$ では，長方形 APSD が円の内部に入ることはない。

【コメント 1】　$BS^2 = 5$，$BD^2 = 5$ として，出てきた a の値を書いた受験生が多い気がします。真面目に考えると，高校生でも難しいですね。そんな中でも（5），正答率 0.35%，282 人のサンプル調査で 0.35%ですから，1 人は解いたのかな？（または片方だけ書いて部分点？）解こうとしただけ偉いです。

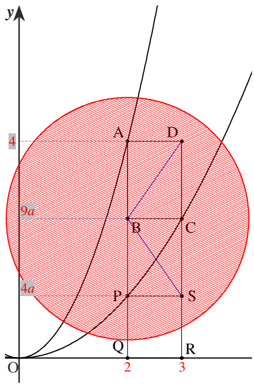
【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/

（※3）$0 < a < \dfrac{4}{9}$ のときの図の説明（これはただの解説）

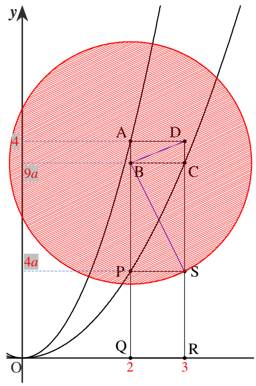
$a = \dfrac{2}{9}$



$a = \dfrac{2}{7}$



$a = \dfrac{2}{5}$



aが 0 に近いほど，点 B と点 D の距離は遠くなる。点 D は常に（3, 4），点 B は a が 0 に近いと（2, 0）に近づくことから分かる。

aが $\dfrac{4}{9}$ に近いほど，点 B と点 S の距離は遠くなるが，$\mathrm{BS} = \sqrt{25a^2 + 1}$なので，$a$ が大きいほど BS は大きくなる。図の変化を見ても，分かる，と思われる。

【コメント 2】 高校 1 年生の夏あたりから，2 次関数という場合分けが恐ろしい分野を習うのですが，その場合分けの恐ろしさを中学数学で再現しようとした，そのような問題です。良い問題ですね，ただ難しいだけではなく（3）で場合分けのヒントを出しています。(5) は鬼問題です，大学入試（共通テスト）で出ていてもおかしくない。

また，正答率が書かれてある福井県の報告書には「ICT を活用して～」と書かれてありましたが，この問題こそ ICT バンバン使えますね。a の値を変化させて（または中学生に触らせて）どのようにグラフが変化するのか，どのように位置関係が変わるのか，興味ある子には楽しい授業。中学校でそういう授業やらないなら（最近はやっている学校多そうですが），塾でグラフ描画ソフト用いて解説するのも楽しいし，生徒も恐らく（？）喜ぶだろうし何より学力上がりそう。塾の評判上がりそう(笑)

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 https://hokkaimath.jp/