芸術的な高校入試第 69 回		
難易度：★×4	美しさ：★×5	点数　/17

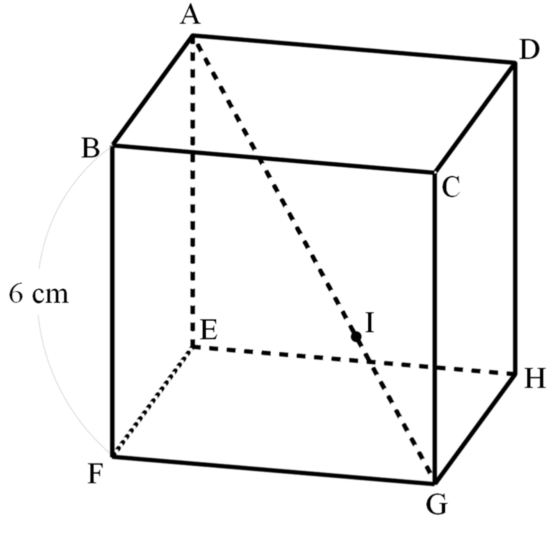
出典：2017 年度　埼玉県

下の図のように，1 辺が 6 cm の立方体 ABCD-EFGH があります。この立方体の対角線 AG 上に，∠AIF＝90°となる点 I をとります。このとき，次の各問に答えなさい。

（1）△AGF と△AFI が相似であることを証明しなさい。（6 点）

（2）線分 FI の長さを求めなさい。（5 点）

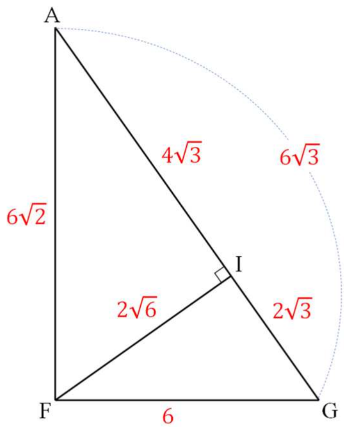
（3）4 つの点 A，F，I，C を頂点とする立体の体積を求めなさい。（6 点）

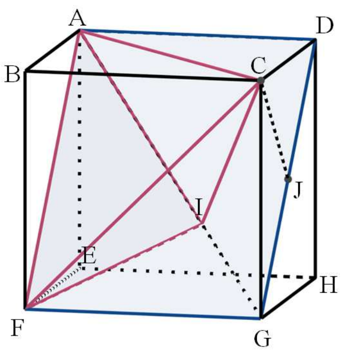


【解答例】

（1）

△AGF と△AFI において，
共通な角だから，∠GAF＝∠FAI…①
仮定より，∠AIF＝90°
GF⊥面 ABFE なので，∠AFG＝90°　（※1）
よって，∠AFG＝∠AIF＝90°　…②
①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいから，△AGF∽△AFI





（2）

△AFG で, 各辺の長さは左図のようになる。

FI ＝ **$2\sqrt{6}$ cm**

（3）

<u>**Point** 高さは平面全体で考える！</u>

まず, △AFI の面積は, △AGF∽△AFI より,

$$\triangle\ \mathrm{AFI} = \frac{2}{3}\triangle\ \mathrm{AGF} = \frac{2}{3}\times 18\sqrt{2} = 12\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2$$

3 点 A, F, I を通る平面の中に, 長方形 AFGD も含まれる。（※2）よって高さは，点 C から GD に垂線を下ろし，交点を J とすると，CJ となる。CJ = $3\sqrt{2}$ cm であるから, 求める体積は,

$$\frac{1}{3}\times 12\sqrt{2}\times 3\sqrt{2} = \mathbf{24\ cm^3}$$

（※1）

埼玉県の模範解答では「仮定より∠AFG＝∠AIF＝90°」としていた。明らかなことなので，これで良いが，学校選択問題，勉強した人ほど「こんな簡単でいいのか……？何か裏があるのでは……？」と思ったと思われる。一言添えるなら，解答例のような感じで良いと思われる。

面と線分の垂直に関しての類題は，

2019 年度愛知県 B：https://hokkaimath.jp/blog-entry-182.html

2020 年度日比谷高校：https://hokkaimath.jp/blog-entry-120.html

など。日比谷の模範解答は，明らかで済ませてないですね。

（※2）

立方体切断の話を思い出すと良い。

2016 年度北海道：https://hokkaimath.jp/blog-entry-88.html

など。

【コメント】

高さ CJ において，点 J が△AFI 内に無くて，人によっては驚く問題です。シンプルですが，中々考えさせられる，また受験生を戸惑わせるのに良い問題です。Geogebra で色々描いてみたので，

https://www.geogebra.org/3d/bh2wan4b

で遊んでみてください。色々な方向から立方体を見ると，より分かる！？

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/