芸術的な高校入試第 70 回		
難易度：★×5	美しさ：★×6	得点　　　　　/16

出典：2021 年度　灘高校　高校入試

次の$\boxed{}$内に適する数を記入せよ。

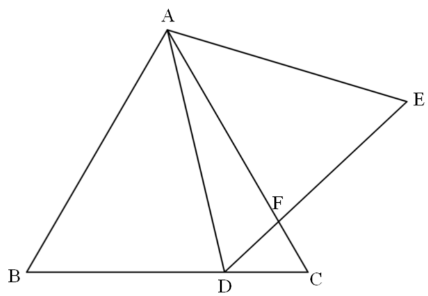
(1) $\left(2\sqrt{2}-3\right)^2$を計算すると，$\boxed{}$となる。

また，$\sqrt{\sqrt{\left(10-7\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(7-5\sqrt{2}\right)^2}}$ を計算すると，$\boxed{}$となる。

(2) 箱の中に，数字１が書かれたカードが１枚，数字２が書かれたカードが２枚，数字３が書かれたカードが３枚，数字４が書かれたカードが４枚，合計 10 枚のカードがある。この箱から A さんはカードを１枚引き，カードに書かれた数を a とする。そのカードを箱に戻さず続けて B さんはカードを引き, カードに書かれた数を b とする。このとき，$a>b$ となる確率は$\boxed{}$である。

(3) a，b を 0 でない定数，c，p，q を定数とする。
x の方程式$ax^2+cx+b=0$ の解が $x=5$，p であり，x の方程式 $bx^2+cx+a=0$ の解が $x=3$，q であるとき，$p+q=\boxed{}$である。

(4) 右の図で，△ABC と△ADE は正三角形である。点 D は辺 BC 上にあり, BD＞CD である。点 F 辺 AC と辺 DE の交点である。△ADE の面積が, △ABC の面積の$\dfrac{5}{6}$倍であるとき, △FDC の面積は△AFE の面積の$\boxed{}$倍である。



【解答例】

（1）（1 点＋3 点）（ステキ問題）

Point

$$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a \leq 0) \end{cases} \quad たとえば，\sqrt{(-5)^2}=5,\ \sqrt{(5)^2}=5$$

$\left(2\sqrt{2}-3\right)^2 = \mathbf{17-12\sqrt{2}}$

$10>7\sqrt{2}$，$7<5\sqrt{2}$より，

$$\sqrt{\sqrt{\left(10-7\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(7-5\sqrt{2}\right)^2}}$$

$$=\sqrt{\left(10-7\sqrt{2}\right)-\left(5\sqrt{2}-7\right)}=\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}-3\right)^2}$$

$2\sqrt{2}<3$ であるから，$\sqrt{\left(2\sqrt{2}-3\right)^2}=\mathbf{3-2\sqrt{2}}$

（2）（4 点）

A さんと B さんのカードの引き方は，10×9＝90 通りである（樹形図を描こうとすると 10×9＝90 の理由が分かる）。

A さんが（4 枚の）４を引いたとき，B さんは（6 枚の）１～３を引けばよいから，4×6＝24 通り。

A さんが（3 枚の）３を引いたとき，B さんは（3 枚の）１～２を引けばよいから，3×3＝9 通り。

A さんが（2 枚の）２を引いたとき，B さんは（1 枚の）１を引けばよいから，2×1＝2 通り。

合計，$24+9+2=35$ 通りなので，求める確率は，$\dfrac{35}{90}=\mathbf{\dfrac{7}{18}}$

（3）（4 点）

<u>（解答例 1）（ステキ）</u>

$ax^2+cx+b=0$　の両辺を$x^2(\neq 0)$で割ると，$a+c\bullet\dfrac{1}{x}+b\bullet\dfrac{1}{x^2}=0$

整理して，$b\bullet\dfrac{1}{x^2}+c\bullet\dfrac{1}{x}+a=0$　ここで，$\dfrac{1}{x}=t$と置くと，

$bt^2+ct+a=0$　となり，この解は，$bx^2+cx+a=0$ と同じく，$t=3,q$ となる。よって，$ax^2+cx+b=0$ の解の逆数が，$bx^2+cx+a=0$ の解と同じ。$\dfrac{1}{p}=3$，$\dfrac{1}{5}=q$ となるから，$p=\dfrac{1}{3}$ より，$p+q=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}=\boldsymbol{\dfrac{8}{15}}$

<u>（解答例 2）**Point** a と c を消去する（文字を減らす）</u>

$ax^2+cx+b=0$ に，$x=5$ を代入し，$25a+5c+b=0\cdots$①

$bx^2+cx+a=0$ に，$x=3$ を代入し，$9b+3c+a=0\cdots$②

①$\times 3-$②$\times 5$ より，$(75-5)a=(45-3)b$　$70a=42b$　$a=\dfrac{3}{5}b$

①$-$②$\times 25$ より，$(75-5)c=-(225-1)b$　$70c=-224b$　$c=-\dfrac{16}{5}b$

これを，方程式に代入する。

$ax^2+cx+b=\dfrac{3}{5}bx^2-\dfrac{16}{5}bx+b=0$

$b\neq 0$ より，bで割って，$\dfrac{3}{5}x^2-\dfrac{16}{5}x+1=0$

$3x^2-16x+5=0$　$(3x-1)(x-5)=0$　$x=5,\dfrac{1}{3}$　より，$p=\dfrac{1}{3}$

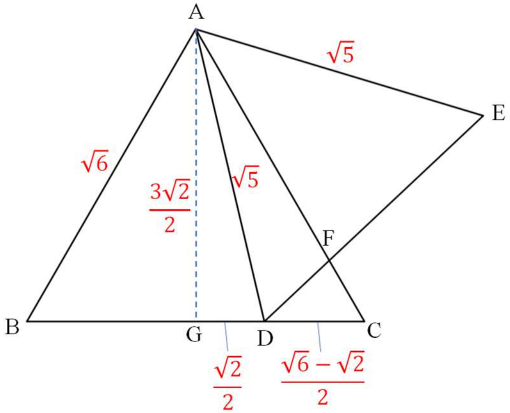
$bx^2+cx+a=bx^2-\dfrac{16}{5}bx+\dfrac{3}{5}b=0$

$b\neq 0$ より，bで割って，$x^2-\dfrac{16}{5}x+\dfrac{3}{5}=0$

$5x^2-16x+3=0$　$(5x-1)(x-3)=0$　$x=3,\dfrac{1}{5}$　より，$q=\dfrac{1}{5}$

$p+q=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}=\boxed{\mathbf{\dfrac{8}{15}}}$

（4）（4 点）



△ABC と△ADE の面積比が 6 : 5 であることから，相似比は，$\sqrt{6}:\sqrt{5}$となる。今回は△FDC と△AFE の面積比を求めるので，それぞれの正三角形の 1 辺の長さを$\sqrt{6}$，$\sqrt{5}$としても問題ない。

上図で，点 A から辺 BC に垂線を下ろし交点を G とすると，

$\mathrm{GD}=\sqrt{5-\dfrac{18}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　であるから，$\mathrm{DC}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

△FDC∽△AFE なので，相似比が

$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}:\sqrt{5}=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right):2\sqrt{5}$なので，

$$\triangle\mathrm{FDC}=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(2\sqrt{5}\right)^2}\triangle\mathrm{AFE}=\frac{8-4\sqrt{3}}{20}\triangle\mathrm{AFE}=\frac{2-\sqrt{3}}{5}\triangle\mathrm{AFE}$$

$\boxed{\mathbf{\dfrac{2-\sqrt{3}}{5}}}$倍

【コメント】

（1）がとてもとても素敵な問題です。基本が大事というのはこういうことです。

（2）は，よくある確率の問題ですね。樹形図を考えながら描いている人は，すぐ計算できます。

（3）はもっと良い解法ありませんかね？何かありそう。

（4）は計算面倒ですが，よくある問題ですね。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/