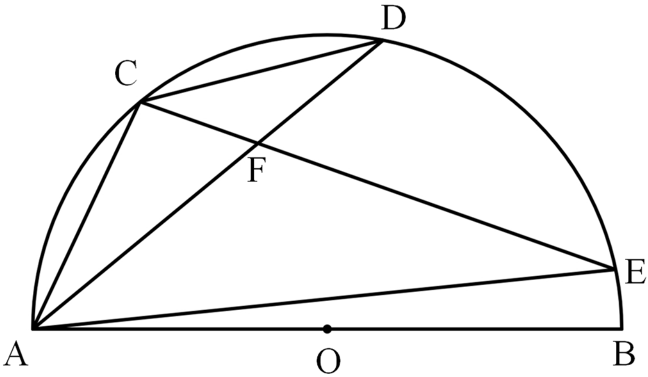
芸術的な高校入試第 72 回		
難易度：★×6	美しさ：★×6	得点　　　　　/20

出典：2011 年度　桐朋高校　高校入試

下の図のように，AB を直径とする半円 O の周上に 3 点 C，D，E がある。△CAD は∠ACD を頂角とする二等辺三角形である。また，AD と CE の交点を F とする。



（1）△AEC∽△FAC であることを証明せよ。

（2）AB＝12，AD＝$4\sqrt{5}$，CE＝$4\sqrt{6}$であるとき，次のものを求めよ。

①　AC の長さ

②　△AEF の面積

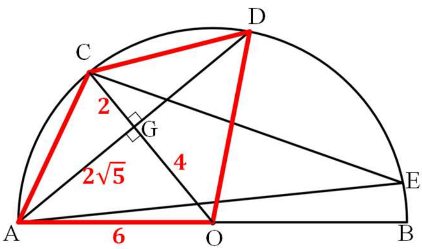
【解答例】

（1）（8 点）

△AEC と△FAC において,
共通な角だから，∠ACE＝∠FCA…①
CA＝CD より二等辺三角形の底角は等しいから，∠FAC＝∠FDC
$\overset{\frown}{CA}$に対する円周角は等しいから，∠FDC＝∠AEC
よって，∠AEC＝∠FAC…②
①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいから，△AEC∽△FAC

（2）①（6 点）

Point 半径を利用し凧形四角形(二等辺三角形 2 つ)を作る！



OD を結ぶと，凧形四角形が見えてくる（△CAD も△OAD も二等辺三角形！）OC と AD との交点を G とすると，∠CGD＝∠OGA＝90°

△OGA において, $OG = \sqrt{36-20} = 4$

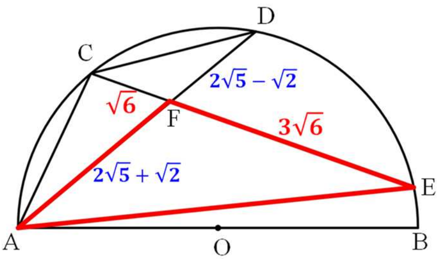
よって，CG＝6－4＝2 となるから，

$AC = \sqrt{20+4} = \mathbf{2\sqrt{6}}$

（2）②（6 点）

Point △CADの面積から辺の比で変換していく！

Point 二次方程式の係数に根号ついていてもびびらない！



（2）より，△CADの面積は，

$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{5}\times 2=4\sqrt{5}$

△AEC∽△FACより，

AC: FC = EC: ACなので，

$2\sqrt{6}:FC=4\sqrt{6}:2\sqrt{6}$

これを解いて，$FC=\sqrt{6}$であるから，$FE=3\sqrt{6}$，FC：FE＝1：3…①

次に，△FDC∽△FEAより，FD: FE = FC: FA　FD＝xと置くと，

$x:3\sqrt{6}=\sqrt{6}:\left(4\sqrt{5}-x\right)$　$4\sqrt{5}x-x^2=18$　$x^2-4\sqrt{5}x+18=0$

解の公式を用いて解くと，$x=\frac{4\sqrt{5}\pm\sqrt{80-72}}{2}=\frac{4\sqrt{5}\pm 2\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{5}\pm\sqrt{2}$

$AG(2\sqrt{5})<AF$なので，$FD=2\sqrt{5}-2$，$FA=2\sqrt{5}+2$

したがって，△AFEの面積は，$4\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}\times\frac{3}{1}=\mathbf{6\sqrt{5}+3\sqrt{2}}$

【コメント】

北海道の大問 4（をかなり難しくした）みたいな感じの問題です。（1），（2）①は丁度よいですね。

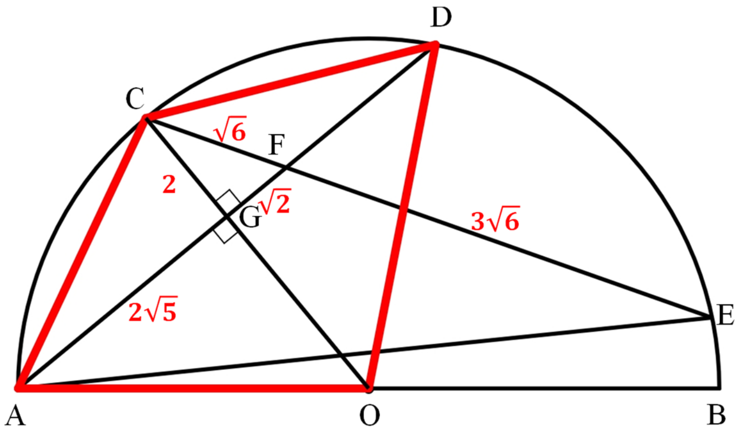
（2）①の補助線の引き方が何となく目新しい問題です。現行のカリキュラムで，凧形四角形だの等脚台形だのやらなかったと思われますが，中学生でも知っておくと得することがあるかもしれません。

凧形四角形の他の問題：https://hokkaimath.jp/blog-entry-126.html

（2）②はいかにも私立という感じの問題ですね。難しいというより，計算が大変です。もっと楽な方法ある？？

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/

（**2**）②別解というかより良い解法



FC の長さを求めるまでは，先ほどと同じ。

△CGF で，三平方の定理より，$\mathrm{GF}=\sqrt{6-4}=\sqrt{2}$

よって，$\triangle\mathrm{CAF}=\dfrac{1}{2}\times\left(2\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\times 2=2\sqrt{5}+\sqrt{2}$

CF：FE＝1：3 なので，△AFE＝3×△CAF＝$\mathbf{6\sqrt{5}+3\sqrt{2}}$