芸術的な高校入試第７４回		
美しさ：★×7	難易度：★×6	得点：　　　　　/25

出典：平成 31 年度　日比谷高校

下の**図１**で，点 O は原点，曲線 l は関数 $y=ax^2$（$a>0$）のグラフを表している。３点 A，B，C は曲線 l 上にあり，その x 座標を順に t，$t+4$，$t+5$ とする。点 A の x 座標は負の数，点 B の x 座標は正の数，点 A の y 座標は点 C の y 座標より大きいとする。点 O から点（1, 0）までの距離，および点 O から点（0, 1）までの距離をそれぞれ 1 cm として，次の各問に答えよ。

図１

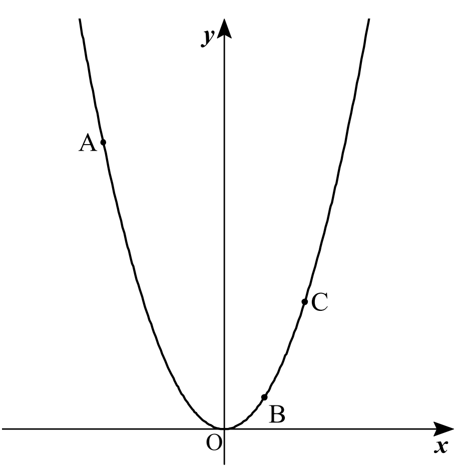
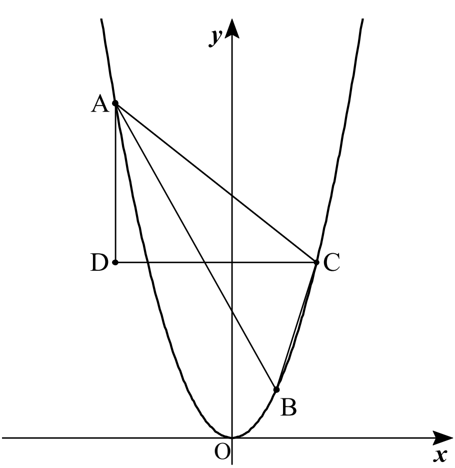


図２

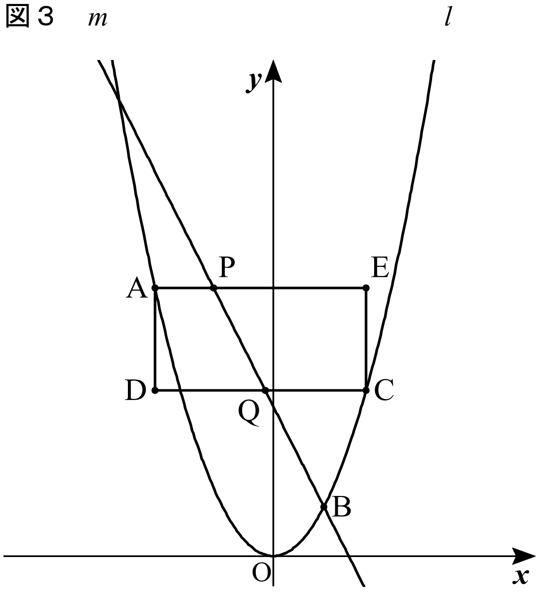


問 1　**図１**において，点 A と点 B，点 A と点 C をそれぞれ結び，線分 AB と y 軸との交点を M，線分 AC と y 軸との交点を N とした場合を考える。$a=2$，$t=-3$ のとき，線分 MN の長さは何 cm か。

問 2　**図２**は，**図１**において，点 A と点B，点 B と点C，点 C と点 A をそれぞれ結び，点 A を通り y 軸に平行な直線と, 点 C を通り x 軸に平行な直線との交点を D とした場合を表している。$a=1$ の場合を考える。△ABC と△ADC の面積が等しくなるとき，t の値を求めよ。ただし，答えだけでなく，答えを求める過程がわかるように，途中の式や計算なども書け。

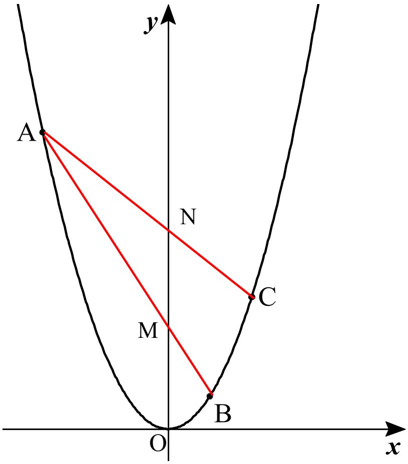
問 3　下の**図３**は，**図１**において，点 A を通り y 軸に平行な直線と，点 C を通り x 軸に平行な直線との交点を D とし，点 C を通り y 軸に平行な直線と，点 A を通り x 軸に平行な直線との交点を E とした場合を表している。点 B を通り傾きが -2 の直線を m とし，直線 m と線分 AE との交点を P，直線 m と直線 DC との交点を Q とする。$t=-\dfrac{14}{5}$ で，四角形 PQCE の面積が四角形 ADQP の面積の $\dfrac{3}{2}$ 倍となるとき，a の値を求めよ。

図３



【解答例】

問 1（7 点）



<u>**Point** 大人しく式出す</u>

A（$-3, 18$）B（$1, 2$），C（$2, 8$）となる。

直線 AB : $y=-4x+6$,

直線 AC : $y=-2x+12$

MN＝12－6＝**6 cm**

<u>※素早く直線の式を出す方法の例？</u>

・2021 年度宮城県（すげえ説明長い）

https://hokkaimath.jp/blog-entry-222.html

・オリジナル問題（追記読んでください）

https://hokkaimath.jp/blog-entry-282.html

問 2（10 点）

△ABC＝△ADC のとき，底辺 AC が共通なので，高さが等しくなれば良い。このとき，AC//DB となる。

直線 AC の傾きは，$\dfrac{(t+5)^2-t^2}{t+5-t}=\dfrac{(t+5+t)(t+5-t)}{t+5-t}=2t+5\cdots$①

直線 DB の傾きは，$\dfrac{(t+5)^2-(t+4)^2}{t-(t+4)}=-\dfrac{2t+9}{4}\cdots$②

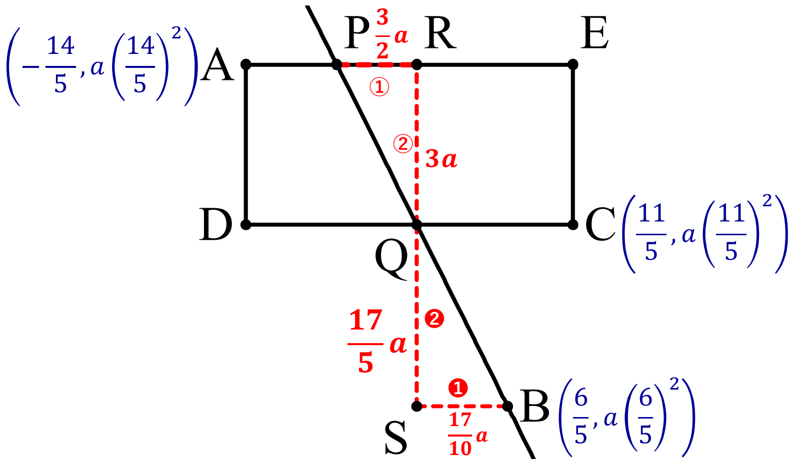
①＝②なので，$2t+5=-\dfrac{2t+9}{4}$　　$8t+20=-2t+9$　　$t=-\dfrac{29}{10}$

【コメント】

問 1 は素早く計算してください。問 2 は文字を使って傾き計算が出来るかどうかだけです，実は基本問題。論述するのは難しそう。問 2 までは，（国立大学を目指すなら）高校入学までに出来るようにしておくことが望ましい。問 3 は（基本知識の組み合わせだけど）難しい！中 2 で傾きを習うとき，先生がどんな図を描いていたか思い出せれば，傾きを相似に変換できます。ただ解き方分かっても，2 乗－2 乗の因数分解など，計算工夫しないと時間足りません。

問 3（8 点）（他にもたくさん解法あります）

【解答例 1】



台形 PQCE : 台形 ADQP＝3 : 2 なので，（PE＋QC）:（AP＋DQ）＝3 : 2 となる。
AE＋DC＝10 cm であるから，PE＋QC＝6 cm となる。
点 Q から y 軸に平行な直線を引き，AE との交点を R，点 B を通り x 軸に平行な直線との交点を S とする。

Q と S のy座標の差は，$\left(\frac{11}{5}\right)^2 a-\left(\frac{6}{5}\right)^2 a=a\left(\frac{11}{5}+\frac{6}{5}\right)\left(\frac{11}{5}-\frac{6}{5}\right)=\frac{17}{5}a$

直線 BP の傾きは－2 なので，BS : SQ＝1 : 2 となる。SB $=\frac{17}{10}a$

R と Q のy座標の差は，$\left(\frac{14}{5}\right)^2 a-\left(\frac{11}{5}\right)^2 a=a\left(\frac{14}{5}+\frac{11}{5}\right)\left(\frac{14}{5}-\frac{11}{5}\right)=3a$

同様に，PR $=\frac{3}{2}a$

すると，BC $=1$ だから QC $=\frac{17}{10}a+1$，PE $=\frac{3}{2}a+\frac{17}{10}a+1=\frac{32}{10}a+1$

PE $+$ QC $=\frac{49}{10}a+2=6$　　$49a=40$　　$\boldsymbol{a=\frac{40}{49}}$

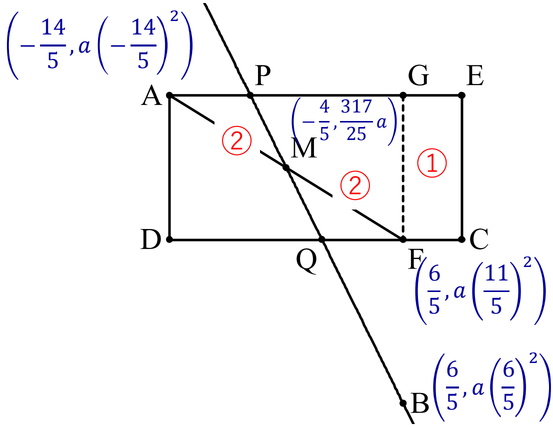
【解答例 2】

Point

平行四辺形（ひし形，長方形，正方形も）の中心（対角線の交点）を通る直線は，平行四辺形を必ず 2 等分する！

詳しくは→https://hokkaimath.jp/blog-entry-65.html を参照

これを，この問題でも利用することができる！



DC 上に点 F，AE 上に点 G を，四角形 ADFG が長方形で，AP＝QF，DQ＝PG となるように取る。このとき，DF：FC＝4：1。

すると台形 ADQP＝台形 PQFG で，台形 ADQP : 台形 PQCE＝2 : 3 のとき，台形 ADQP：台形 PQFG：台形 GFCE＝2：2：1 となる。

よって結局，点 B を通る傾き－2 の直線は，長方形 ADFG を 2 等分すれば良いので，AF の中点 M を通ればよい。

F の座標は内分公式使っても良いし，DC＝5 より，

$5\times\frac{1}{5}=1$ だから，F のx座標は$\frac{11}{5}-1=\frac{6}{5}$，$y$座標は$\left(\frac{11}{5}\right)a^2$

AF の中点 M の座標は$\left(\left(-\frac{14}{5}+\frac{6}{5}\right)\times\frac{1}{2}, \left(\frac{196}{25}+\frac{121}{25}\right)a\times\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{4}{5}, \frac{317}{50}a\right)$

直線 BM の傾きは－2 だから，

$\left(\frac{317}{50}a-\frac{36}{25}a\right)\div\left(-\frac{4}{5}-\frac{6}{5}\right)=-2$　$\frac{245}{50}a\div(-2)=-2$　$\frac{49}{10}a=4$　$\boldsymbol{a=\frac{40}{49}}$