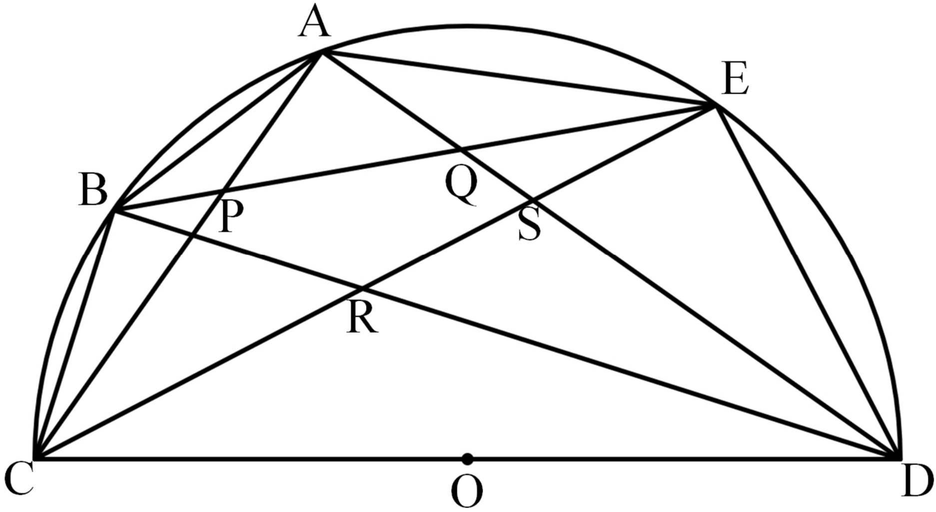
芸術的な高校入試第７５回		
美しさ：★×6	難易度：★×8	得点：　　　　　/16

出典：2014 年度　福岡県　追加問題

長さが 20 cm の線分 CD を直径とし，点 O を中心とする半円がある。下の図のように，$\overset{\frown}{CD}$上に点 A をとり，$\overset{\frown}{AC}$上に$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$となるように点 B を，$\overset{\frown}{AD}$上に$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{ED}$となるように点 E をとり，五角形 ABCDE をつくる。対角線 BE と対角線 AC，AD との交点をそれぞれ P，Q とし，対角線 CE と対角線 BD，AD との交点をそれぞれ R，S とする。次の問いに答えよ。



（1）対角線 BE の長さを求めよ。

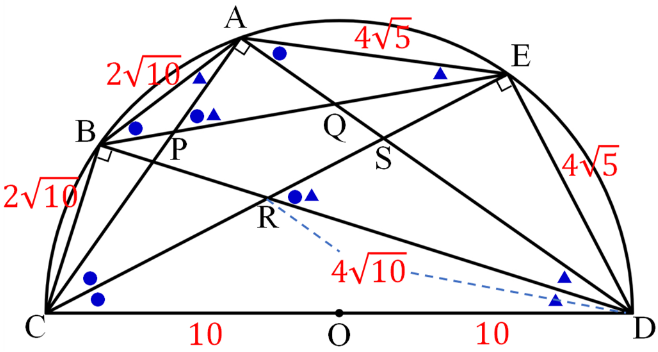
（2）△APE∽△SRD を証明せよ。

（3）BC＝$2\sqrt{10}$ cm のとき，△APQ の面積を求めよ。

【解答例】（3）→（1）→（2）の順に掲載。

（3）（5点）

（解答例1）



※$BE = 10\sqrt{2}$

Point 1　45°

∠ACE＝∠DCE＝●，∠ADB＝∠BDC＝▲，∠CAD＝90°より，

2●＋2▲＝90°だから，●＋▲＝45°，よって，∠SRD＝∠APE＝45°となるので，各所に直角二等辺三角形が大量出現する。

Point 2 大量に相似

更に等しい角に記号を付けていくと，△ABE∽△PBA∽△QAE であることが分かる。よって，AE の長さを求めようと努力すれば何とかなる。

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$より，$AB=BC=2\sqrt{10}$

$BD=\sqrt{400-40}=6\sqrt{10}$で，$BR=2\sqrt{10}$だから，$RD=4\sqrt{10}$

$ED=4\sqrt{5}$ となり，$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{ED}$より $AE=ED=4\sqrt{5}$

△ABE∽△PBA∽△QAE なので，

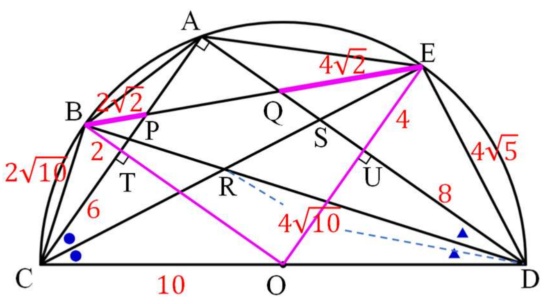
$AB:PB=BE:BA$，$2\sqrt{10}:PB=10\sqrt{2}:2\sqrt{10}$　$PB=2\sqrt{2}$

$QE:AE=AE:BE$，$QE:4\sqrt{5}=4\sqrt{5}:10\sqrt{2}$　$QE=4\sqrt{2}$

$PQ=10\sqrt{2}-2\sqrt{2}-4\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ となるので，

$\triangle APQ=\frac{1}{2}\times4\times4=$ **$8\ \mathrm{cm}^2$**

（解答例 2）



Point 1　45°

∠ACE＝∠DCE＝●，∠ADB＝∠BDC＝▲，∠CAD＝90° より，2●＋2▲＝90° だから，●＋▲＝45°，よって，∠SRD＝∠APE＝45° となるので，各所に直角二等辺三角形が大量出現する。

Point 2　凧形

四角形 OCBA と四角形 ODEA はそれぞれ凧形四角形（二等辺三角形が二つくっついた図形）である。よって，OB⊥CA，OE⊥AD である。OB と CA との交点を T，OE と AD との交点を U とすると，△BTP も△EUQ も直角二等辺三角形となる。

Point 3　BP，QE から

BE の長さから BP＋QE を引いて，PQ の長さを求めれば，△APQ は直角二等辺三角形だからすぐ面積が求まる。

△OBC の面積を求める。O から BC に垂線を下すとその長さは $\sqrt{100-10}=3\sqrt{10}$ なので，面積は 30 となる。面積は，(1/2)×OB×TC でも求められ，TC＝6 となる。

$BD=\sqrt{400-40}=6\sqrt{10}$で，$BR=2\sqrt{10}$だから，$RD=4\sqrt{10}$

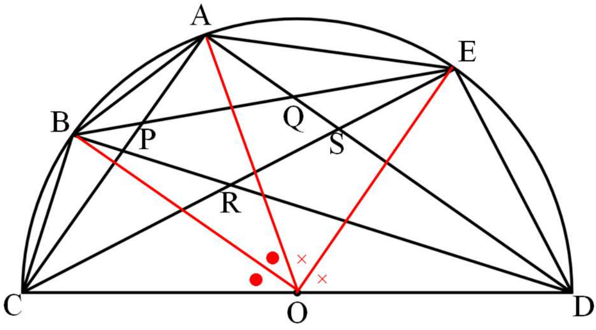
$ED=4\sqrt{5}$ となる。O から ED に垂線を下すとその長さは$4\sqrt{5}$なので, △OED の面積は 40 となり，UD＝8 となる。

$BT=\sqrt{40-36}=2$，$EU=\sqrt{80-64}=4$ となるから，

$BP=2\sqrt{2}$，$EQ=4\sqrt{2}$，$PQ=10\sqrt{2}-6\sqrt{2}=4\sqrt{2}$となるので，

$\triangle APQ=\dfrac{1}{2}\times 4\times 4=$ **8 cm²**

（1）（3 点）



$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$より，

∠AOB＝∠BOC＝●

$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{ED}$より，

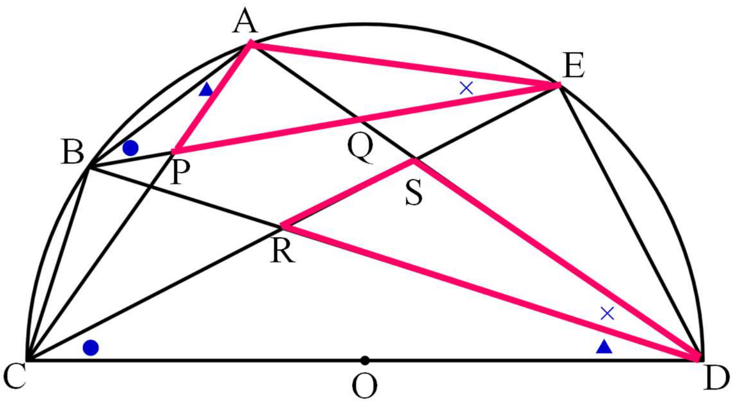
∠AOE＝∠EOD＝×

2●＋2×＝180°　より，

●＋×＝90°

よって，△OBE は直角二等辺三角形だから，**BE＝$10\sqrt{2}$ cm**

（2）（8 点）



※

×＝▲

である！

△APE と△SRD において，

$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角だから，∠AEP＝∠SDR……①

$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{ED}$ より，等しい長さの弧に対する円周角は等しいから，

∠ABE＝∠ECD

$\overset{\frown}{BC}$に対する円周角だから，∠BAC＝∠BDC

△ABP の外角より，∠APE＝∠ABE＋∠BAC

△RCD の外角より，∠SRD＝∠ECD＋∠BDC

よって，∠APE＝∠SRD……②

①，②より 2 組の角がそれぞれ等しいから△APE∽△SRD

【コメント】

福岡の追加問題なので，これと＋14 点分の問題（動点の難問）を 30 分で解きます。時間に余裕ありそうでたぶん無いです。

まず図が見づらいです。線がいっぱい，問題文もよく読まないと意味が分からなくなります。本番と，このプリントは図を大きく印刷しているので何とかなるかもしれませんが，問題集にこれが載った際は，図が小さくて本当に嫌になりそう。

(1) からキツイ。日頃から角度を a だとか●とかで置く癖ついていれば，すぐに∠BOE＝90° と気づけそう。大昔中学生だった私は（1）から怪しいな。

（2）も中々気づきづらい外角を用いる証明です。弧の長さ用いて円周角はすぐ分かるのですが，視力検査，もう何が何だか分かりません。

（3）は本当に難問です。大量の相似だの凧形四角形だの，45° だの，求められる知識も多いし，求められる視力もえげつないです。嫌になっちゃいますね。

冷静に（1）（2）を解いて，時間余ったらのんびり他の問題を解く，そんな感じでしょうかね。時間無制限で（3）解くなら楽しいですが，受験で解くとなると話別です。凡人の私は時間内に解けませんでした。

中学数学の範囲内で適切に難易度を最大限上げた問題です。私立の問題や都立独自校のように，テクニックで有利になるようなことはほとんどありませんね。良い問題です。ただ，受験対策で解くというより趣味で解いた方が良いですね。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/