

芸術的な高校入試第77回

美しさ：★×5

難易度：★×6

得点：

/25

出典：2022年度 日比谷高校

次の各問に答えよ。

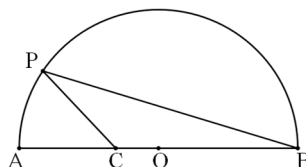
問1 $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ を計算せよ。

問2 二次方程式 $(2x - 6)^2 + 4x(x - 3) = 0$ を解け。

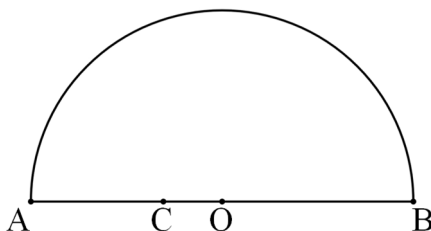
問3 一次関数 $y = ax + 4$ において、 x の変域が $-3 \leq x \leq 6$ のとき、 y の変域が $2 \leq y \leq 5$ である。定数 a の値を求めよ。

問4 1枚の硬貨を投げるとき、表が出たら得点1、裏が出たら得点2とする。この硬貨を3回投げ、1回目の得点を a 、2回目の得点を b 、3回目の得点を c とするとき、 $b = ac$ となる確率を求めよ。ただし、硬貨の表と裏の出ることは同様に確からしいものとする。

問5 右の図で、点 O は線分 AB を直径とする半円の中心である。点 C は線分 OA 上にあり、 \widehat{AB} 上の点を P とする。解答欄に示した図をもとにして、 $\angle CPB = 30^\circ$ となる点 P



を、定規とコンパスを用いて作図によって求め、点 P の位置を示す文字 P も書け。ただし、作図に用いた線は消さないでおくこと。



【解答例】(5点×5)

問1

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ※x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) \\ & = \left\{ (\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \right\} \left\{ (\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \right\} + \frac{1}{\sqrt{6}} \\ & = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{6} = 4\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{25\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

※工夫してもしなくても日比谷受験生なら計算時間変わらんとと思われる。

問2

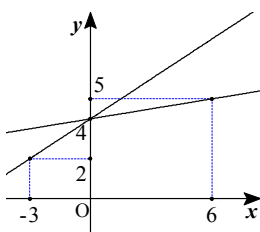
$$(2x - 6)^2 + 4x(x - 3) = 4(x - 3)^2 + 4x(x - 3) \quad (※)$$

因数分解して、 $4(x - 3)(x - 3 + x) = 0$, $4(x - 3)(2x - 3) = 0$ $x = 3, \frac{3}{2}$

(※) $(2x - 6)^2 = \{2(x - 3)\}^2 = 4(x - 3)^2$ となる、地味に注意

(※) $(ab)^2 = a^2b^2$ である。例： $(2 \times 5)^2 = 2^2 \times 5^2 = 100$ 地味に注意
これは工夫した方が絶対に速い。

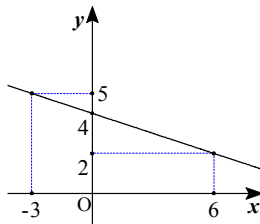
問3



$a > 0$ のとき、 $y = ax + 4$ は、 $(-3, 2)$ $(6, 5)$ を通る。
しかし直線の式に代入すると、

$$(-3, 2) \text{ のとき } a = \frac{2}{3}, \quad (6, 5) \text{ のとき } a = \frac{1}{6}$$

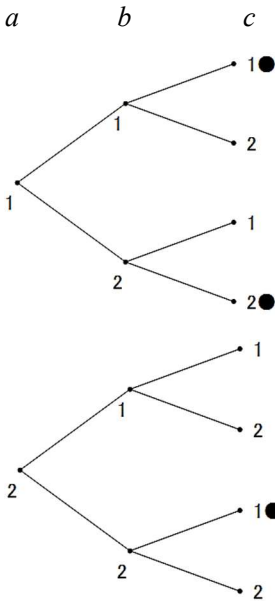
と一致しないので不適である。



$a < 0$ のとき、 $y = ax + 4$ は、 $(-3, 5)$ $(6, 2)$ を通る。
直線の式に代入すると、

$$(-3, 5) \text{ のときも } (6, 2) \text{ のときも } a = -\frac{1}{3} \text{ となり適している。}$$

$$a = -\frac{1}{3}$$



問 4

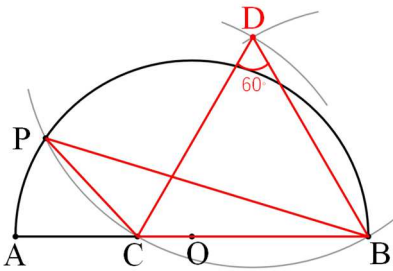
大人しく樹形図を描く。 $b=ac$ となるのは、●印のついた 3 通り。

【コメント】

落ち着いて解けば、問 5 以外は余裕で解けるはず。問 3 は一瞬混乱するかもしれませんが、答えの吟味が必要です。

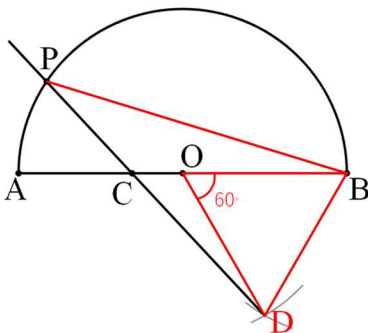
問 5 は私時間内に解けませんでした、脳の衰え、反省します。中学生は余裕で解くのか？大変良問です。私はこんな良い問題自分で作れません。

問 5 ※赤い線は説明のために引いている線である。



BC を 1 辺とする正三角形 DBC を作図し、点 D を中心とし、2 点 B, C を通る円と半円との交点を P とすれば良い。

円 D において、 \widehat{BC} に対する中心角の $\angle BDC = 60^\circ$ ，円周角の $\angle BPC = 30^\circ$ となる。



BO を 1 辺とする正三角形 OBD を作図し、直線 DC と半円との交点を P とする。点 D は円 O の円周上にある。

\widehat{BD} に対する中心角の $\angle BOD = 60^\circ$ ，円周角の $\angle BPD = 30^\circ$ となる。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問

<https://hokkaimath.jp/>