芸術的な高校入試第７９回		
美しさ：★×5	難易度：★×6	得点：　　　　/17

出典：2022 年度　埼玉県　学校選択

次の文を読んで，あとの各問に答えなさい。（17 点）

T さんは，カットされた状態で販売されているスイカを見たときに，そのひとつひとつは平面で切られた多面体であることに気づきました。球から多面体を切り出したときの立体の体積について興味をもった T さんは，次のように考えました。

下の図 1 は，中心 O，半径 r cm の球を，O を通る平面で切った半球で，切り口の円の円周上に∠AOB＝90°となるように 2 点 A，B をとります。また，∠AOC＝∠BOC＝90°となる半球の表面上の点を C とし，半球を点 A，O，C を通る平面と点 B，O，C を通る平面の 2 つの平面で切ります。図 2 は，半球をこの 2 つの平面で切ったあとにできる立体のうち，点 A，B，C を含むもので，この立体を V とします。

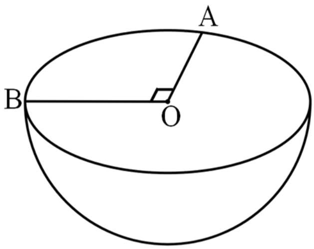


図 1

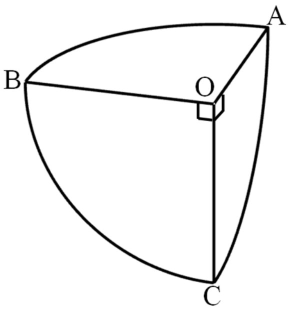


図 2（立体 V）

(1) 立体 V の体積を求めなさい。（4 点）

(2) 図 2 において，おうぎ形 OBC の$\overset{\frown}{BC}$の長さを二等分する点 D を，図 3 のようにとります。このとき，5 つの点 A，B，C，D，O を頂点とする四角錐の体積を，途中の説明も書いて求めなさい。(7 点)

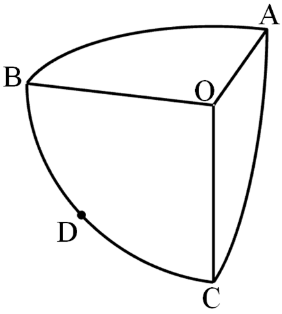


図 3

(3) 図 2 において，おうぎ形 OBC の$\overset{\frown}{BC}$上に∠COE＝30° となるように点 E をとり，点 E と線分 OA を通る平面で立体 V を切ると，点 C を含む立体は図 4 のようになりました。図 4 のように, おうぎ形 OAC の$\overset{\frown}{AC}$を 1 : 2 に分ける点を F，おうぎ形 OAE の$\overset{\frown}{AE}$を 1 : 2 に分ける点を G とするとき，6 つの点 A，C，E，F，G，O を頂点とする五面体の体積を求めなさい。(6 点)

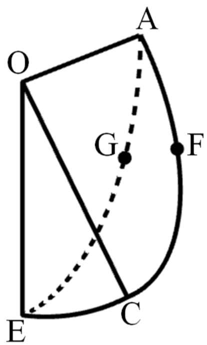


図 4

【解答例】

(1)

$$\frac{4\pi r^3}{3}\times\frac{1}{8}=\boldsymbol{\frac{\pi r^3}{6}\ \mathrm{cm}^3}$$ ※半球を$\frac{1}{4}$カットしていることに注意！

(2)

図を描いて解答した方が速いし楽だと思われる。

（OA⊥OB，OA⊥OC より，AO⊥平面 OBDC なので）

体積は，

$\frac{1}{3}\times$四角形 OBDC$\times$OA で求められる。

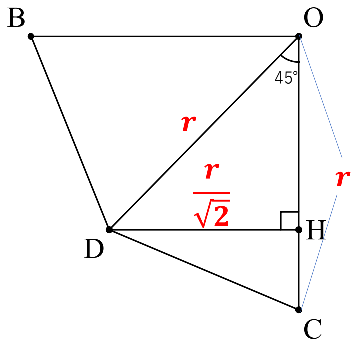
四角形 OBDC は，

△OCD＋△OBD＝2△ODC，右図より，

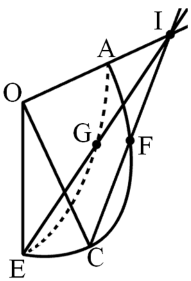
$$2\triangle\mathrm{ODC}=2\times\frac{1}{2}\times r\times\frac{r}{\sqrt{2}}=\frac{r^2}{\sqrt{2}}$$

よって四角錐の体積は，

$$\frac{1}{3}\times\frac{r^2}{\sqrt{2}}\times r=\frac{r^3}{3\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}r^3}{6}\ \mathrm{cm}^3}$$



(3)



左図のように，直線 OA，EG，CF の交点を I とすると三角錐ができるので，ここから体積を引いて求める……というのが受験界でよくある問題だが，

この問題は△OEC//△AGF ではない！

<u>①，まずは△OEC の面積</u>

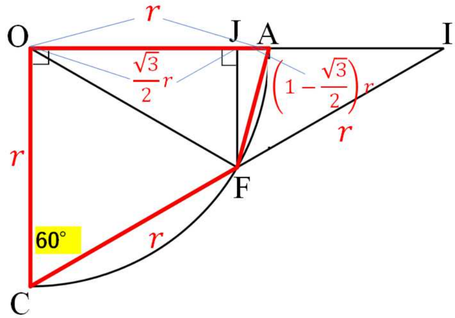
点 E から OC に垂線を下ろし交点を P とすると，

∠PEO＝60°，∠EOP＝30° なので，EP＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$EO＝$\frac{r}{2}$となる。

$$\triangle\mathrm{OEC}=\frac{1}{2}\times r\times\frac{r}{2}=\frac{r^2}{4}$$

②，F などの平面での位置関係

△IOC を切り出して考える。



左図より，∠ICO＝60°，OC＝r だから，OI＝$\sqrt{3}r$

三角錐 I－OEC

$$=\frac{1}{3}\times\frac{r^2}{4}\times\sqrt{3}r=\frac{\sqrt{3}r^3}{12}$$

点 F から OI に垂線を下ろし交点を J とする。CF＝FI となるので，OJ＝JI となる。

△OCE//△JFK となる点 K をとると，6 つの点 J，F，K，O，C，E を頂点とする五面体の体積は$\frac{\sqrt{3}r^3}{12}\times\frac{2^3-1}{2^3}=\frac{7\sqrt{3}r^3}{96}$

③，三角錐 A-JFK の体積

この体積に，三角錐 A-JFK の体積を足せばよい。

$\triangle\mathrm{JFK}=\frac{r^2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{r^2}{16}$，$\mathrm{AJ}=r-\frac{\sqrt{3}}{2}r=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r$ だから，

$$\frac{1}{3}\times\frac{r^2}{16}\times\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r=\frac{r^3}{48}-\frac{\sqrt{3}r^3}{96}$$

④，答え

求める体積は，$\frac{7\sqrt{3}r^3}{96}+\frac{r^3}{48}-\frac{\sqrt{3}r^3}{96}=\boxed{\mathbf{\frac{1+3\sqrt{3}}{48}r^3\ cm^3}}$　（$\left(\frac{1}{48}+\frac{\sqrt{3}}{16}\right)r^3$）

【コメント】

今年の学校選択問題飛ばしていますね，一体何があったのでしょうか。(2) まで解いてほしいですが，(3) は趣味用です。正答率が気になります，0.1%とかじゃないでしょうか。**△OEC//△AGF** ではない！ので，地獄のような問題です，よくこんな問題作れましたね。最近は大学共通テストといい，国公立で難問を出すのが流行っているのでしょうかね。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/