

芸術的な高校入試第 80 回

難易度：★×7

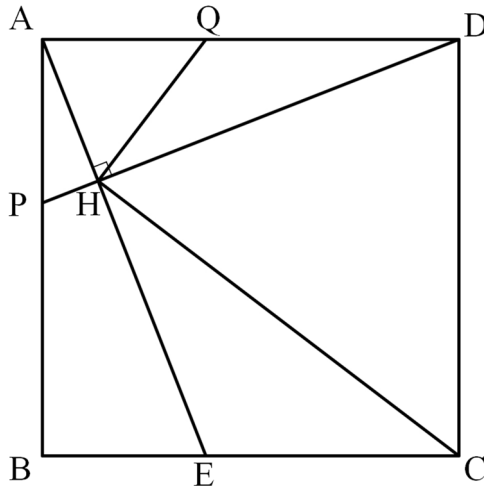
美しさ：★×7

得点

/14

出典：2011 年度 大阪教育大学附属高校 池田校舎

正方形 $ABCD$ の辺 AB , AD 上に $AP=AQ$ となる点 P , Q をとる。頂点 A から直線 PD に垂線をひき、直線 PD , BC との交点をそれぞれ H , E とするとき、次の問いに答えなさい。



- (1) 四角形 $QECD$ は長方形であることを証明しなさい。
- (2) $QH \perp HC$ であることを証明しなさい。

【解答例】

(1) (8点)

Point 定期テスト対策で「平行四辺形であることを証明しなさい」という問題に慣れていれば、そこまで難しくない問題。

$\triangle APD$ と $\triangle BEA$ において、

仮定より (※), $AD=BA$ ……①, $\angle PAD=\angle EBA=90^\circ$ ……②

$\angle AHD=90^\circ$ なので、

$\angle ADP=180^\circ - \angle AHD - \angle HAD=90^\circ - \angle HAD$

$\angle BAE=90^\circ - \angle HAD$

よって、 $\angle ADP=\angle BAE$ ……③

①, ②, ③より、1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、

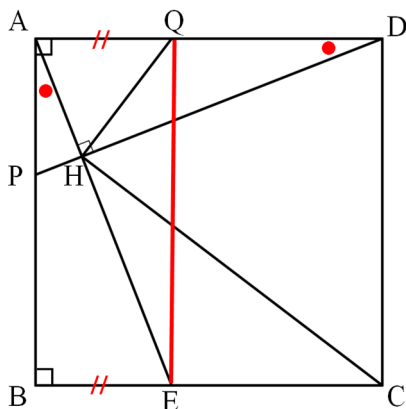
$\triangle APD \equiv \triangle BEA$

したがって、 $AP=BE$, また仮定より $AP=AQ$ なので、 $BE=AQ$

$QD=AD-AQ$, $EC=BC-BE$ で、 $AD=BC$ より、 $QD=EC$ となる

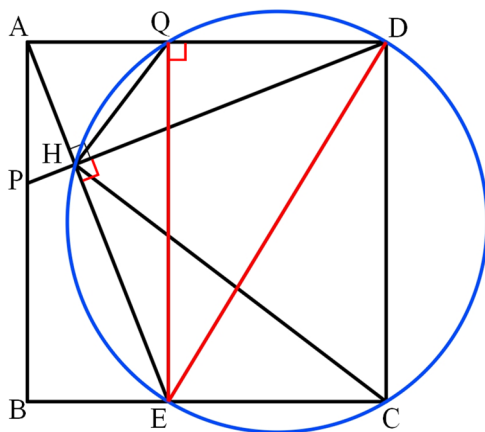
これと、 $QD \parallel EC$ より、1組の対辺が平行で長さが等しいから、四角形 $QECD$ は平行四辺形であり、また $\angle ECD=\angle QDC=90^\circ$ なので、長方形となる

(※) 正方形の定義が「4つの辺の長さが全て等しく、4つの角の角度が全て等しい四角形」であるので仮定よりで問題ない、不安なら定義でも書いておけば良い。



(2) (6 点)

(1) より、 $\angle QEC + \angle CDQ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ となるから (四角形の対角の和が 180° となるので)、4 点 Q, E, C, D は同一円周上にある。
2 点 H, Q が直線 DE について同じ側にあり、 $\angle DHE = \angle DQE = 90^\circ$ なので、4 点 Q, H, E, D は同一円周上にある。
したがって、5 点 Q, H, E, C, D は同一円周上にある。
 $\widehat{QC}$ に対する円周角だから、 $\angle QHC = \angle QEC = 90^\circ$ となる。
よって、 $QH \perp HC$



【コメント】

(2) みたいな問題よく思いつきますよね。同一円周上はすぐ思いつくと思われませんが、それを連鎖させるなんて聞いたことがありません。大変良い問題です、受験生からしたら勘弁してくれという感じですが。

(1) は長いですが、定期テストレベルを少し難しくした感じです。中2の頃にしっかり問題演習していれば、そんなにつらくないはず。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>