

芸術的な高校入試第81回

美しさ：★×4

難易度：★×5

得点： /20

出典：2022年度 戸山高校

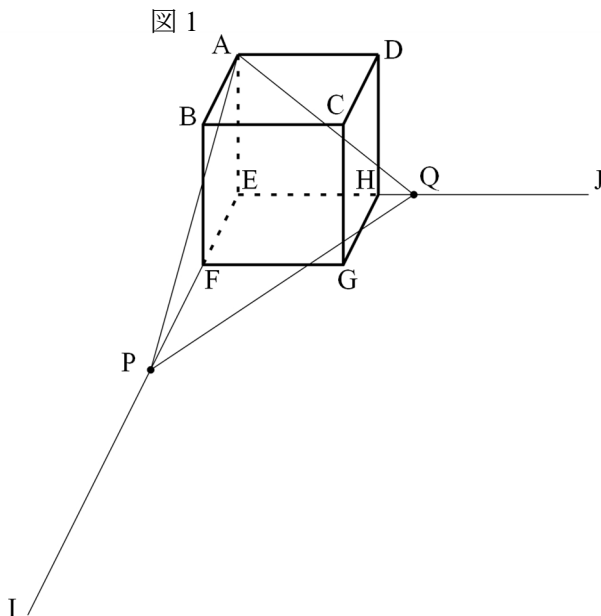
図1に示した立体 $ABCD-EFGH$ は、1辺の長さが4cmの立方体である。点Iは辺EFをFの方向に延ばした直線上にあり、 $EI=20$ cm、点Jは辺EHをHの方向に延ばした直線上にあり、 $EJ=10$ cmである。

点Pは頂点Eを出発し、線分EI上を毎秒2cmの速さで動き、10秒後に点Iに到達する。点Qは点Pが頂点Eを出発するのと同時に、頂点Eを出発し、線分EJ上を毎秒1cmの速さで動き、10秒後に点Jに到達する。

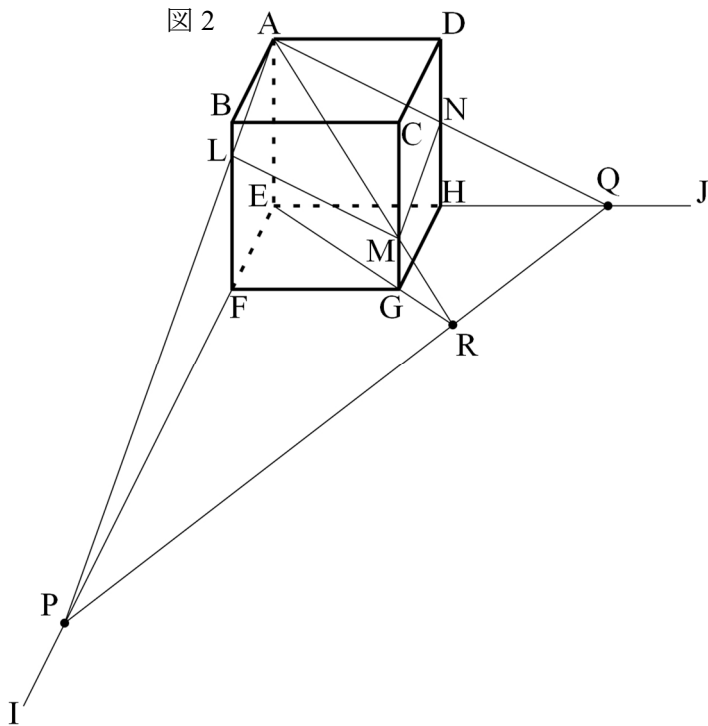
頂点Aと点P、頂点Aと点Q、点Pと点Qをそれぞれ結ぶ。点Pと点Qが頂点Eを出発してからの時間を t 秒とする。次の各問に答えよ。

問1 $t=5$ のとき、立体 $A-EPQ$ の体積は何 cm^3 か。

問2 $PQ=4\sqrt{5}$ cmのとき、 $\triangle APQ$ の面積は何 cm^2 か。ただし、答えだけでなく、答えを求める過程が分かるように、途中の式や計算なども書け。



問3 図2は、図1において、 $t=8$ のとき、線分 AP と辺 BF との交点を L 、
 線分 AQ と辺 DH との交点を N 、頂点 E と頂点 G を通る直線を引き、
 線分 PQ との交点を R 、頂点 A と点 R を結んだ線分 AR と辺 CG との
 交点を M とし、点 L と点 M 、点 M と点 N をそれぞれ結んだ場合を表
 している。立体 $ABCD-LMN$ の体積は何 cm^3 か。



【解答例】**問 1 (7 点)**

$t=5$ のとき, $EP=10$ cm, $EQ=5$ cm である。

$$\text{三角錐 } A-EPQ = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 10 \times 5 \times 4 = \frac{100}{3} \text{ cm}^3$$

問 2 (10 点)

$EP=2t$, $EQ=t$ と表されるから, $PQ=4\sqrt{5}$ の

$$\text{とき, } (2t)^2 + t^2 = (4\sqrt{5})^2$$

$t > 0$ より, $t=4$, よって, $EP=8$, $EQ=4$

$AE=4$ だから,

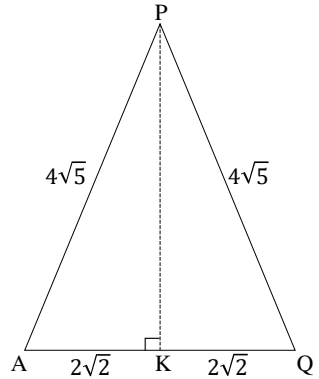
$$AP = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}, \quad AQ = 4\sqrt{2}$$

$AP=PQ$ より, $\triangle APQ$ は二等辺三角形となる

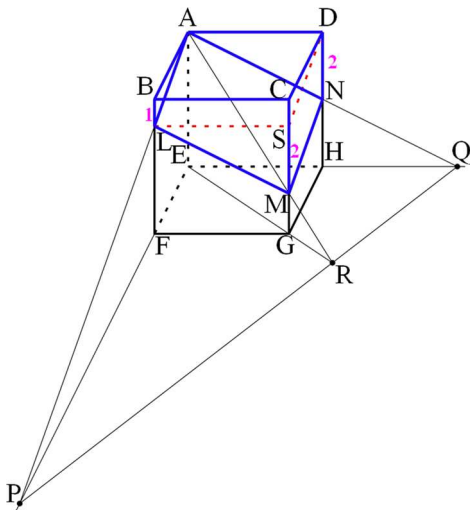
ので, AQ の中点を K とすると, $PK \perp AQ$,

$$PK = \sqrt{80 - 8} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{よって, } \triangle APQ = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = 24 \text{ (cm}^2\text{)}$$



問3 (8点)



4点 A, L, M, N は $\triangle APQ$ 上にあるので、同一平面上にある。

※点 M は AR 上にある。

よって、四角形 ALMN は平行四辺形である（立方体の切断を思い出して）。

$\triangle ABL \sim \triangle PFL$ で、

$AB : PF = 4 : 12 = 1 : 3$ だから、

$BL = 1$

$\triangle ADN \equiv \triangle QHN$ なので $DN = 2$

点 L から FG に平行な直線を引き、辺 CG との交点をとす。 $CS = 1$ となり、 $SM = 2$

立体 $ABCD-LMN$ は、斜角柱 $LSM-ADN$ と、三角柱 $ABL-DCS$ に分けられる。

$$\text{斜角柱 } LSM-ADN = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 4 = 16,$$

$$\text{三角柱 } ABL-DCS = \frac{1}{2} \times 1 \times 4 \times 4 = 8,$$

よって求める体積は $16 + 8 = \mathbf{24 \text{ cm}^3}$

【コメント】

例年凄まじい難易度の戸山高校ですが、2022年度は比較的易しめでした。このくらいの難易度だと差が付きやすく逆にも恐ろしいかもしれません。問3が見掛け倒しです。いかに必要な情報だけ抜き取れるかが勝負、解答は簡単だけど思いつくのは至難の業。問2、問3で答えがどちらも「24」これは受験生混乱したでしょうね(笑)