芸術的な高校入試第８３回		
美しさ：★×5	難易度：★×5	得点： /25

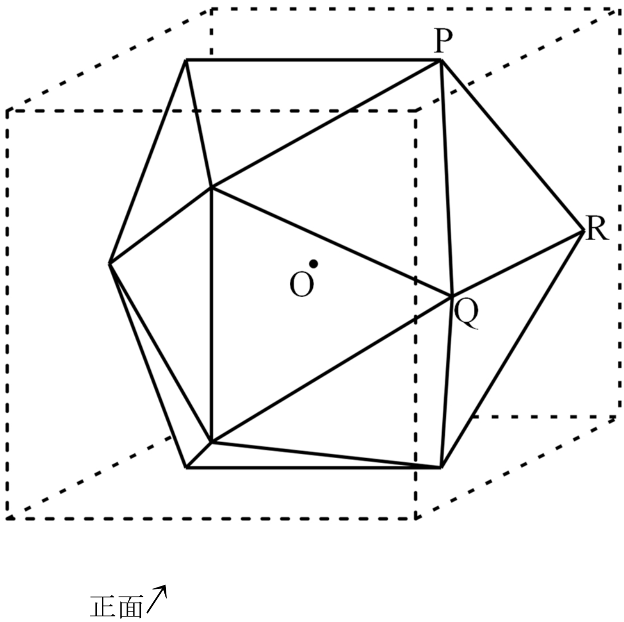
出典：2022 年度　開成高校

１辺の長さが4の立方体を考える。この中に, 次の条件を満たす正多面体Xを考える。

・正多面体Xの各頂点には，５つの合同な正三角形が集まっている。

・立方体の６つの面が，正多面体Xのいずれかの辺を含む。

また図のように, 立方体の面に含まれる正多面体Xの１つの辺を QR とし, さらに△PQR が正多面体Xの面をなすよう，点 P をとる。



この正多面体Xの体積を計算しよう。以下，辺 QR の中点を S とする。

（1）正多面体Xの立面図（正面から眺めた図）を，解答欄に記入せよ。長さは必ずしも正確でなくてよい。ここで，解答蓮に点線で描かれた正方形は立方体正面から見た図を表す。

以下の問題を解くにあたっては，解答欄（1）の図に考察をかき加えてよい。

（2）正多面体Xの１辺の長さを $2l$ とおく。

（i）PS の長さを，l を用いて表せ。

(ii) 三平方の定理を用いて，l が満たす２次方程式を１つ作れ。方程式の右辺が 0 になり，かつ l^2 の係数が 1 になる形で解答すること。

(iii) l を求めよ。

(3) 立方体の対称の中心を O とする。正多面体 X の全ての面は，点 O から等距離にある。この距離を h とする。

(i) △OPS の面積を求めよ。

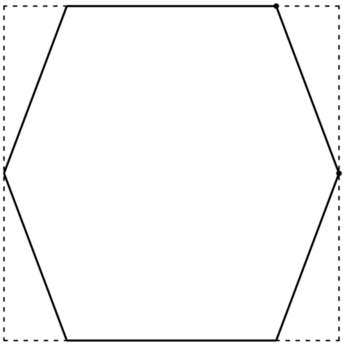
(ii) h を求めよ。解答にあたっては，分母の有理化を行うこと。

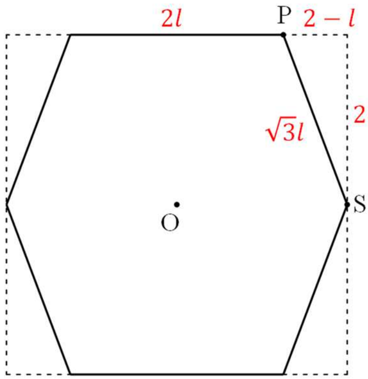
(4) この正多面体 X の体積を求めよ。

(1) 解答欄

【解答例】

（1）（5 点）





（2）（i）（3 点）

△PQR は正三角形なので，PQ＝$2l$ のとき，**PS＝$\boldsymbol{\sqrt{3}l}$**

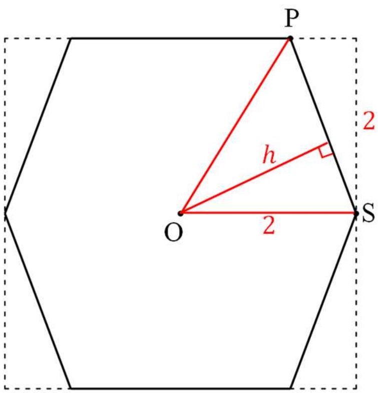
（2）（ii）（2 点）

右上の図で，$(2-l)^2+4=3l^2$　整理して，$2l^2+4l-8=0$

$\boldsymbol{l^2+2l-4=0}$

（2）（iii）（2 点）

$l>0$ より，$\boldsymbol{l=-1+\sqrt{5}}$



（3）（i）（3 点）

左図より，**△OPS＝2**

（3）（ii）（4 点）

左図より，$2=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)\times h$

$$h=\frac{4}{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{4\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}{3\times4}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{3}}$$

（4）（6 点）

正多面体 X は正二十面体なので，体積は，

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{PQR}\times h\times 20$$

$$=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)^2\times\frac{4}{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}\times 20$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\sqrt{5}-1\right)\times 80$$

$$=\boldsymbol{\frac{80\left(\sqrt{5}-1\right)}{3}}$$

【コメント】

2021 年度灘高校 https://hokkaimath.jp/blog-entry-260.html では正十二面体が出題されていました。正多面体は，正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体の 5 種類しかありません。最近のトレンドかも，演習しておくとお得？

こういう問題は見掛け倒しなことが多いです。この開成の問題は誘導が恐ろしいほど丁寧ですね。開成は●ぬほど難しい問題と丁寧な問題との差が激しいですね。解ける問題を見極めなくてはなりません。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/