芸術的な高校入試第８５回		
美しさ：★×5	難易度：★×5	得点：　　　　/25

出典：2019 年度　都立青山高校

右の図 1 に示した立体 ABCD-EFGH は，AB＝3 cm, AD＝4 cm, AE＝7 cm の直方体である。辺 AE 上に点 P を，辺 BF 上に点 Q をとり，頂点 A と点 Q と頂点 D をそれぞれ結ぶ。次の各問に答えよ。

問 1　AP＝5 cm，AQ＋QG の長さが最も短くなるとき，次の（1)，（2）に答えよ。

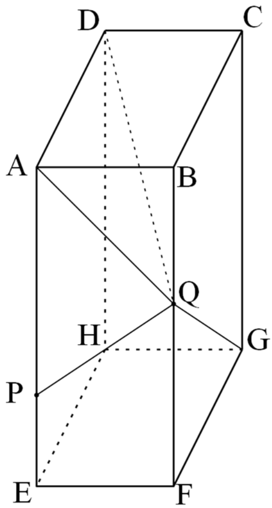


図 1

（1）線分 DQ の長さは何 cm か。

（2）直方体 ABCD-EFGH を 3 点 P，Q，G を通る平面で分けたとき，頂点 F を含む立体の体積は何 cm^3 か。

問 2　右の図 2 は，図 1 において，AQ＝PQ とし，頂点 B と頂点 D を結んだ場合を表している。△APQ と△QFG の面積が等しくなるとき，四角形 PEFQ と△QBD の面積の比を最も簡単な整数の比で表せ。ただし，答えだけでなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

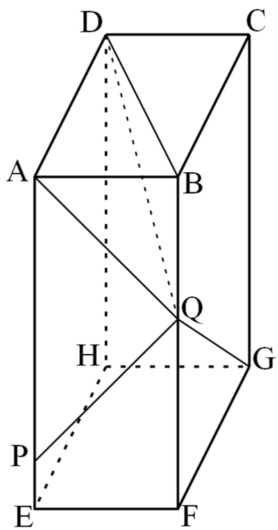
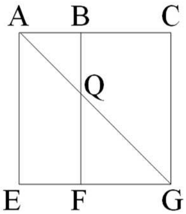
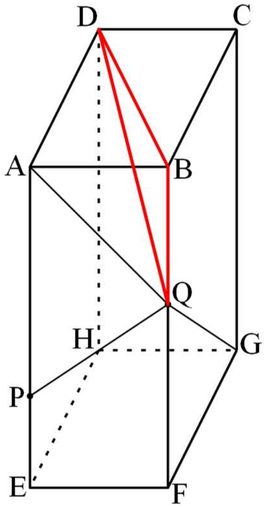


図 2

【解答例】

問 **1**（**7** 点）





直方体の展開図において，長方形 ABFE，長方形 BCGF の部分を切り取る。AQ＋QG が最も短くなるとき，3 点 A，Q，G は同一直線上にある。△ABQ∽△GFQ，四角形 AEGC は正方形となるので，

△ABQ は直角二等辺三角形となる。

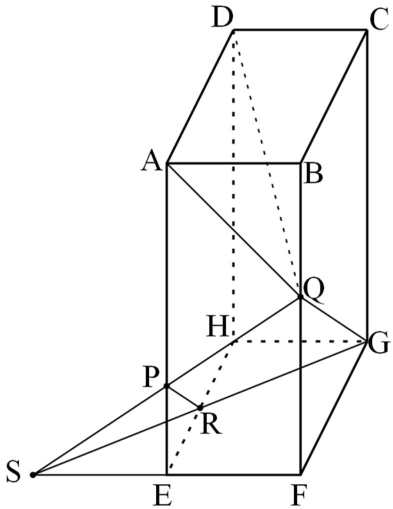
よって，BQ＝3 cm

BD＝$\sqrt{3^2+4^2}$＝5 cm

BQ⊥BD なので，

DQ＝$\sqrt{3^3+5^2}$＝$\mathbf{\sqrt{34}}$ **cm**

問 **2**（**8** 点）



3 点 P，Q，G を通る平面で分けたとき，QG//PR となる点 R を辺 EH 上にとると，求める立体は，立体 PRE-QGF となる。

直線 FE，直線 QP の交点を S とする。

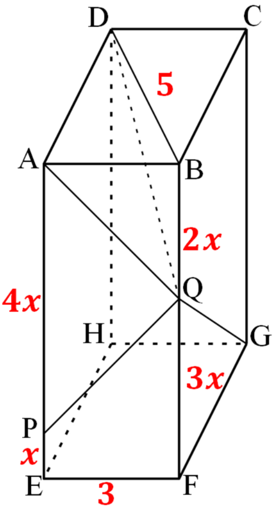
△PRE∽△QGF，PE＝2 cm，QF＝4 cm なので，

立体 PRE-QGF

$=\dfrac{7}{8}$三角錐 S－QFF

$=\dfrac{7}{8}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times4\times4\times6=$**14 cm**$^{\mathbf{3}}$

問 3（10 点）



$\triangle$APQ＝$\triangle$QFG のとき，

$\triangle\ \mathrm{APQ} = \frac{1}{2} \times \mathrm{AP} \times 3 = \frac{3}{2}\mathrm{AP}$

$\triangle\ \mathrm{AQG} = \frac{1}{2} \times 4 \times \mathrm{QF} = 2\mathrm{QF}$ だから，

$\frac{3}{2}\mathrm{AP} = 2\mathrm{QF}$　$\mathrm{AP} = 4x$と置くと，$\mathrm{QF} = 3x$

$\triangle$APQ は AQ＝QP の二等辺三角形なので，

$\mathrm{BQ} = \frac{1}{2}\mathrm{AP} = 2x$，

よって，$\mathrm{BF} = 5x$だから，$\mathrm{PE} = 5x - 4x = x$

四角形 $\mathrm{PEFQ} = \frac{1}{2}(\mathrm{QF} + \mathrm{PE}) \times \mathrm{EF} = \frac{1}{2} \times 4x \times 3 = 6x$

$\mathrm{BD} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ だから，$\triangle\ \mathrm{QBD} = \frac{1}{2} \times \mathrm{QB} \times \mathrm{BD} = \frac{1}{2} \times 2x \times 5 = 5x$

よって，四角形 PEFQ：$\triangle$QBD＝**6：5**

【コメント】

いかにも自校作成校が出しそうな問題の集まりです。問 1 は典型題，ミスしないで解いてください。

問 2 は 2016 年度東京都 https://hokkaimath.jp/blog-entry-158.html などで演習していれば余裕で解けたでしょうね。過去問演習は大事です。また，切断が分からない方は 2016 年度北海道 https://hokkaimath.jp/blog-entry-88.html などの解説でも見ておいてください。

問 3 は日比谷などもよく出すパターンですね。青山高校が発表している解答では x の値を出していましたが，私は面倒なので出しませんでした。

色々練習になる問題なので，解いておくとたぶんいいことあります。