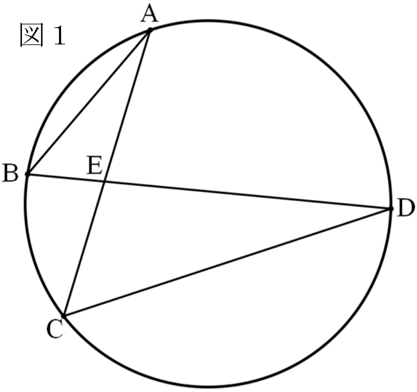
芸術的な高校入試第８６回

美しさ：★×6	難易度：★×7	得点：　　　/25

出典：2022 年度　立川高校

右の図１で，異なる３点 A，B，C は同一円周上にある。点 D は点 B を含まない $\overset{\frown}{AC}$上にある。点 A と点 B，点 A と点 C，点 B と点 D，点 C と点 D をそれぞれ結び，線分 AC と線分 BD との交点を E とする。次の各問に答えよ。

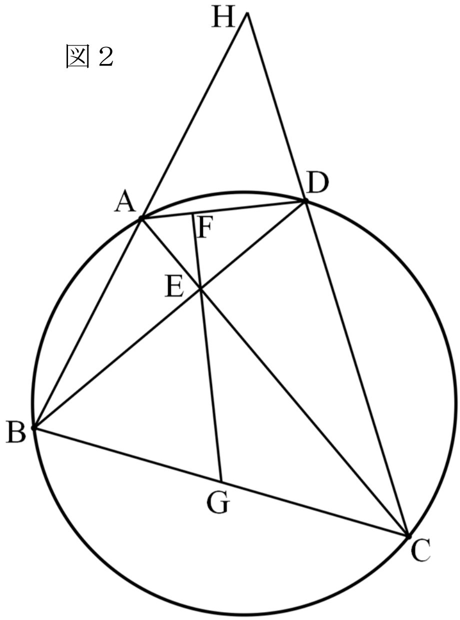
図１



問１　図１において，AB＝3 cm，BE＝1 cm，CD＝7 cm，AE＝EC のとき，線分 DE の長さは何 cm か。

問２　右の図２は，図１において，線分 AC と線分 BD が垂直に交わるとき，点 B と点 C，点 A と点 D をそれぞれ結び，点 E を通り線分 AD に垂直な直線を引き，線分 AD，線分 BC との交点をそれぞれ F, G とし，線分 AB を A の方向に延ばした直線と線分 CD を D の方向に延ばした直線との交点を H とした場合を表している。ただし，∠ABC，∠BCD はともに鋭角であるものとする。次の（1），（2）に答えよ。

図２



（1）点 G は線分 BC の中点であることを証明せよ。

（2）∠EGC＝120°，AD：BC＝1：3 のとき，△BCE の面積は△ADE の面積の何倍か。また，△ADH の面積は△ADE の面積の何倍か。

【解答例】

問 1（7 点）

DE＝x，AE＝EC＝y とする。△ABE∽△DCE より，

AB：AE＝DC：DE だから，3：y＝7：x，すなわち，$3x=7y$

AB：BE＝DC：CE だから，3：1＝7：y，すなわち，$3y=7$

よって，$y=\frac{7}{3}$ となるから，$x=\frac{7}{3}y=\frac{7}{3}\times\frac{7}{3}=\mathbf{\frac{49}{9}}$ **cm**

問 2（11 点）

＜公式解答＞

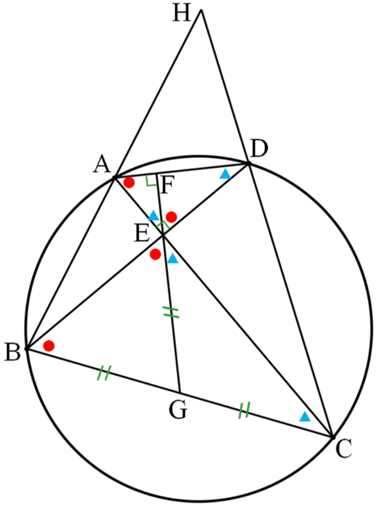
△ADE と△EDF において，
仮定より AC⊥BD，AD⊥EF だから，∠AED＝∠EFD＝90°…①
また，∠D は共通…②
①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいから，△ADE∽△EDF とわかる。
よって，対応する角の大きさは等しいから，∠DAE＝∠DEF…③
また，対頂角は等しいから，∠DEF＝∠GEB…④
$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$に対する円周角は等しいから，∠DAC（∠DAE）＝∠DBC…⑤
③，④，⑤より，∠GBE＝∠GEB となる。
よって，△GBE は GE＝GB の二等辺三角形である。…⑥
同様にして，△GCE は GE＝GC の二等辺三角形である。… ⑦
⑥，⑦より，GB＝GC だから，G は BC の中点であることがわかる。

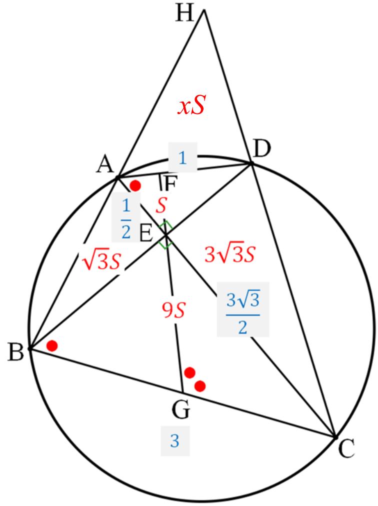
＜別解 1＞

仮定より∠AED＝∠EFD＝90° だから，
∠EAD＝180° －∠AED－∠ADE＝90° －∠ADE
∠DEF＝180° －∠EFD－∠ADE＝90° －∠ADE
よって∠EAD＝∠DEF…①　（一言 90° －∠ADE＝∠EAD＝∠DEF で良いと思う）
同様に，90° －∠EAD＝∠ADE＝∠AEF…②
対頂角は等しいから，∠DEF＝∠GEB…③，∠AEF＝∠GEC…④
$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$に対する円周角は等しいから，
∠GCE＝∠ADE…⑤，∠GBE＝∠EAD…⑥
①，③，⑥より，∠GBE＝∠GEB なので，△GBE は GE＝GB の二等辺三角形であり，②，④，⑤より，∠GCE＝∠GEC なので，△GCE は GE＝GC の二等辺三角形である。よって，GB＝GC となるから，G は BC の中点であることがわかる。

<別解 2>

仮定より∠AED＝∠EFD＝90°
∠EAD＝90° −∠ADE，∠DEF＝90° −∠ADE より，∠EAD＝∠DEF…①
対頂角は等しいから，∠DEF＝∠GEB…②
$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$に対する円周角は等しいから，∠GBE＝∠EAD…③
①，②，③より，∠GBE＝∠GEB，△GBE は GE＝GB の二等辺三角形となる。ここで，3 点 B，C，E を通る円を考えると，∠BEC＝90° より，BC は直径となる。GE＝GB だから，点 G は円の中心となるので，GB＝GC，よって G は BC の中点であることがわかる。





●＝60° ，●●＝120°

問 3（完 7 点）

△ADE∽△BCE，AD : BC＝1 : 3 だから，△BCE の面積は△ADE の面積の **9 倍**

<u>Point　教科書の発展とかに載っている方べきの定理の図思い出せばちょっと楽</u>

円に内接する四角形の内角の和は 180° だから，∠HAD＝∠HCB，

∠HDA＝∠HBC となるので，△HBC∽△HDA　また面積比は 9 : 1 となる。

$\mathrm{AD}=1$，$\mathrm{BC}=3$ とすると，$\mathrm{AE}=\dfrac{1}{2}$，$\mathrm{EC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\triangle \mathrm{AED}=S$，$\triangle \mathrm{BCE}=9S$とすると，$\triangle \mathrm{ABE}=\sqrt{3}S$，$\triangle \mathrm{CDE}=3\sqrt{3}S$

$\triangle \mathrm{ADH}=xS$とすると，$9:1=\left(x+10+4\sqrt{3}\right)S:xS$　解いて，$x=\boldsymbol{\dfrac{5+2\sqrt{3}}{4}}$**倍**

【コメント】

理数科が設置された影響なのか知りませんが，難易度が跳ね上がりましたね。立川は比較的解きやすい問題が多かったイメージがあるのですが，2022 年度は大問 2 を除いて全て鬼でした。

特に大問 3 は……自校作成校の中で一番解きづらいのではないのでしょうか。問 1 もなんやかんや相似で連立するのでまあまあしんどいですし，何より問 2，証明が書きづらい。模範解答は「同様に」と書いてありますが，果たしてこれを書けた受験生何人いるのだろうか……。

問 3 は，過去問である https://hokkaimath.jp/blog-entry-28.html の経験があれば，すぐ△HBC∽△HDA と気づけたかも。または，教科書の発展でよく載っている方べきの定理の図が記憶にあれば気づきやすいですね。相似に無事気づけても，中々見ない解き方をしなくては答えを出せないので，正答率びっくりするくらい低そう。