芸術的な高校入試第８７回		
美しさ：★×4	難易度：★×6	得点：　　　　/25

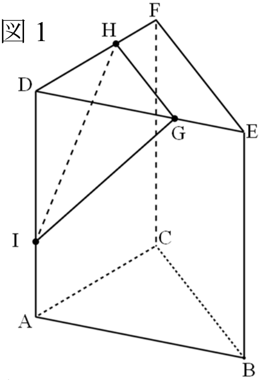
出典：2022 年度　八王子東高校

右の図 1 に示した立体 ABC−DEF は，

AB＝AC＝AD＝3cm，∠BAC＝∠BAD＝∠CAD＝90°

の三角柱である。点 G，点 H，点 I はそれぞれ辺 DE，辺 DF, 辺 DA 上にある点で, DG＝DH＝DI＝x cm ($0<x<3$) である。点 G と点 H，点 H と点 I，点 I と点 G をそれぞれ結ぶ。次の各問に答えよ。

図 1



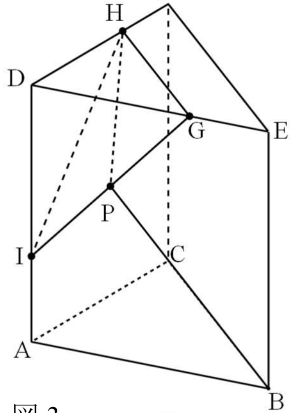
問 1　x＝2 の場合，次の（1），（2）に問いに答えよ。

（1）立体 ABCIGEFH の体積は何 cm^3 か。

(2) 右の図 2 は，線分 GI 上にある点を P とし，頂点 B と点 P，点 P と点 H をそれぞれ結んだ場合を表している。

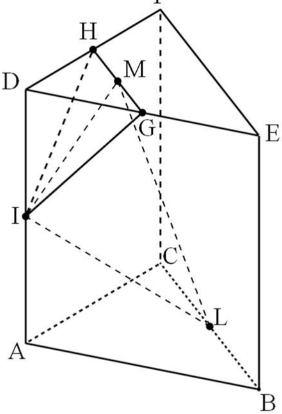
BP＋PH＝l cm とする。点 P を線分 GI 上において動かすとき，最も小さくなる l の値を求めよ。

図 2



問 2　右の図 3 は，図 1 において，辺 BC の中点，線分 GH の中点をそれぞれ L，M とし，点 I と点 L，点 L と点 M，点 M と点 I をそれぞれ結んだ場合を表している。$x=\frac{3}{2}$のとき，△ILM の面積は何 cm^2 か。ただし，解答欄には，答えだけでなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

図 3



【解答例】

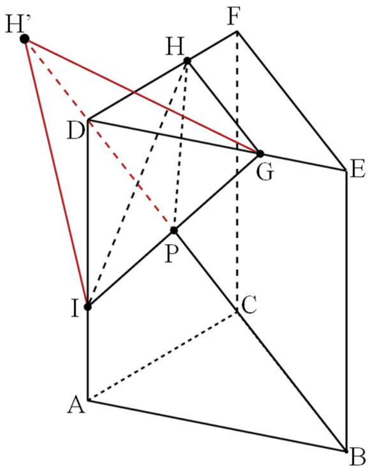
問 1（1）（7 点）

立体 ABC – DEF の体積は，$\dfrac{1}{2}\times 3\times 3\times 3=\dfrac{27}{2}$

三角錐 I – DHG の体積は，$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times 2=\dfrac{4}{3}$

よって，立体 ABCIGEFH $=\dfrac{27}{2}-\dfrac{4}{3}=\boldsymbol{\dfrac{73}{6}}$ **cm³**

問 1（2）（8 点）※個人差あり



<u>Point 都合よく展開図を書くが……</u>

BP＋PH なので，立体 BAIHG の展開図の一部を描く。BP＋PH は，線分 AD を通らないことに注意（そんな単純な典型問題ではない）

四角形 BAIG と△HIG を切り取ればよい。

BP＋PH が最小のとき, 左図で 4 点 B, P, D, H’は一直線上にある。

このとき，∠IDB＝∠GDB なので，BD⊥IG

$IG=2\sqrt{2}$，$\triangle$ HIG は正三角形なので

$PH'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}IG=\sqrt{6}$

$DP=\sqrt{2}$，$DB=3\sqrt{2}$より，$BP=2\sqrt{2}$ よって，$\boldsymbol{l=\sqrt{6}+2\sqrt{2}}$

GeoGebra：https://www.geogebra.org/3d/qaynn3eb

問 2（10 点）

（△ABC，△DGH は直角二等辺三角形で，L，M は BC，GH の中点だから，AL⊥BC，DM⊥GH…①　△ABC//△DGH…②，また BC//EF，(中点連結定理より)EF//GH なので，BC//GH…③）

（①，②，③より）AL//DM となるので，4 点 A，L，M，D は同一平面上にある。

$DG = DI = AI = \frac{3}{2}$， $AL = \frac{1}{\sqrt{2}}AB = \frac{3\sqrt{2}}{2}$， $DM = \frac{1}{\sqrt{2}}DG = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

台形 ABMD $= \frac{1}{2} \times \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) \times 3 = \frac{27\sqrt{2}}{8}$

$\triangle DMI = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{16}$， $\triangle ALI = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{8}$

よって， $\triangle ILM = \frac{27\sqrt{2}}{8} - \frac{9\sqrt{2}}{16} - \frac{9\sqrt{2}}{8} = \boldsymbol{\frac{27\sqrt{2}}{16}}$ **cm^2**

【コメント】

問 1（1）は簡単です，計算ミスに気をつけてください。見直し大事。

問 1 (2) がかなり個人差ある問題ですね。私は間違えてしまいました，猛省。都合よく展開図を描けることができれば秒殺なのですが，描けなかったらさようならです。

問 2 も簡単。 AL//DM より，4 点 A，L，M，D は同一平面上にありますから，単純な平面図形の問題となります。八王子東の模範解答の解き方よりもこっちの方が絶対良いです。絶対は言い過ぎか。八王子の模範解答「M から線分 AL に引いた垂線を MK とすると MK は線分 AL の垂直二等分線であり，MK は底面 ABC に垂直である」とサラッと書いている割には，「△BAC は，∠BAC ＝90° の直角二等辺三角形であり，LB＝LC であるから，AL＝AB/√2」など無駄に丁寧に書いてあるところもあり「？」です。たぶん，途中式さえ書いてあれば，大丈夫なはず。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/