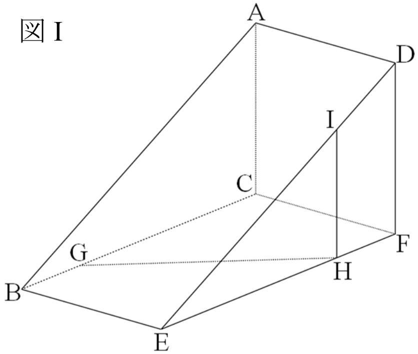
芸術的な難問高校入試第８９回		
美しさ：★×5	難易度：★×6	得点：　　　　/25

出典：2017 年度　大阪府 C

図 I～図 III において，立体 ABC-DEF は三角柱である。△ABC と△DEF は合同な三角形であり，AC＝4 cm，BC＝8 cm，∠ACB＝90°である。四角形 ACFD は正方形であり，四角形 ABED，CBEF は長方形である。G は，辺 BC 上にあって B，C と異なる点である。H は辺 EF 上の点であり，HF＝BG である。G と H とを結ぶ。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は，根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

図 I

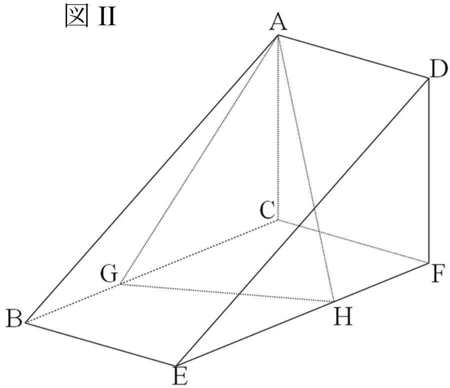


（1）図 I において，I は H を通り辺 DF に平行な直線と辺 DE との交点である。BG＝HF＝x cm とし，$0<x<8$ とする。

①，線分 IH の長さを x を用いて表しなさい。

②，四角形 CGHF の面積が四角形 IHFD の面積の 2 倍であるときの x の値を求めなさい。

図 II



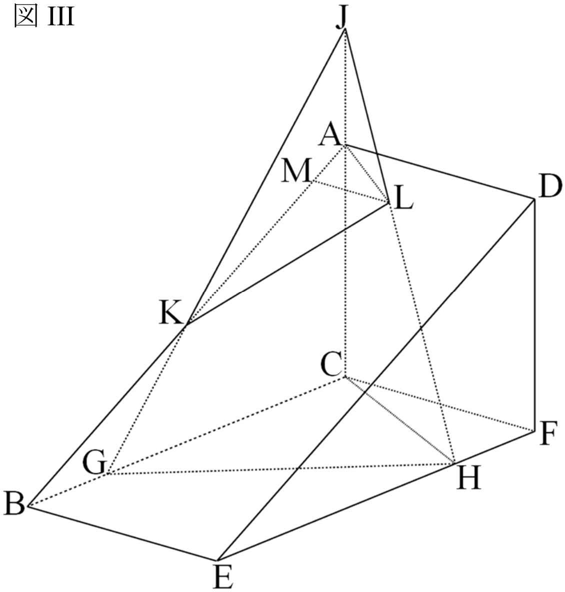
（2）図 II において，A と G，A と H とをそれぞれ結ぶ。AG＝AH であるとき，△AGH の面積を求めなさい。

（3）図 III において，BG＝HF＝2 cm である。C と H とを結ぶ。J は直線 AC 上にあって A について C と反対側にある点であり，JA＝2 cm である。J と G，J と H とをそれぞれ結ぶ。K は，線分 JG と辺 AB との交点である。L は，線分 JH と平面 ABED との交点である。M は，L を通り辺 AD に平行な直線と辺 AB との交点である。このとき，直線 LM は平面 ABC と垂直である。A と L，K と L とをそれぞれ結ぶ。

①，線分 LM の長さを求めなさい。

②，立体 AKL-CGH の体積を求めなさい。

図 III

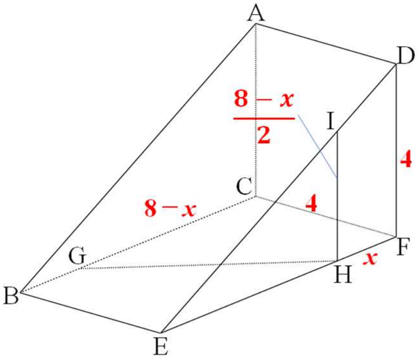


【解答解説】

（1）①（5 点）（正答率 86.2%）

$\triangle \mathrm{EIH} \backsim \triangle \mathrm{EDF}$ より，$\mathrm{IH:DF=EH:EF}$，$\mathrm{IH}=\dfrac{4(8-x)}{8}=\boldsymbol{\dfrac{8-x}{2}}$ cm

（1）②（5 点）（正答率 41.9%）



四角形 $\mathrm{CGHF}=\dfrac{1}{2}\times(8-x+x)\times4=16$

四角形 IHFD

$=\dfrac{1}{2}\times\left(4+\dfrac{8-x}{2}\right)\times x=\dfrac{x}{2}\left(8-\dfrac{x}{2}\right)$

$\dfrac{x}{2}\left(8-\dfrac{x}{2}\right)=8$ より，

$x(16-x)=32$，$x^2-16x+32=0$

$0<x<8$ より，$\boldsymbol{x=8-4\sqrt{2}}$

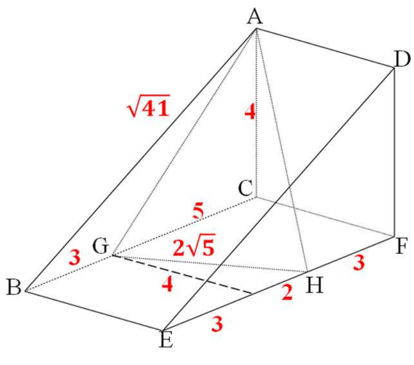
※解の公式簡略版（$a\neq0$）

$ax^2+2bx+c=0$ の解は，$x=\dfrac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}=\boldsymbol{\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}}$

（2）（5 点）（正答率 25.5%）

AG＝AH のとき，△AGC≡△AHC なので，GC＝HC

GC＝8－x，HC＝$\sqrt{x^2+16}$，$x^2+16=(8-x)^2$，これを解いて，$x=3$



$\mathrm{GH}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$

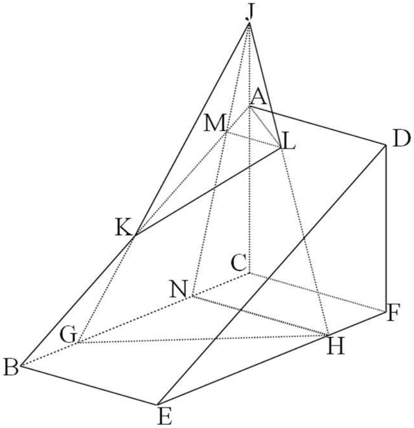
$\mathrm{AG}=\mathrm{AH}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$

点 A から GH に垂線を下ろし交点を X とすると，GX＝$\sqrt{5}$ だから，

$\mathrm{AX}=\sqrt{41-5}=6$

$\triangle \mathrm{AGH}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times6=\boldsymbol{6\sqrt{5}}\ \mathrm{cm}^2$

（2）①（5 点）（正答率 2.1%）



直線 JM と BC の交点を N とする。

5 点 J，M，N，H，L は同一平面上にあり，LM//四角形 BEFC となるから，LM//HN となる。

$$LM=\frac{JM}{JN}\times HN$$ となる。

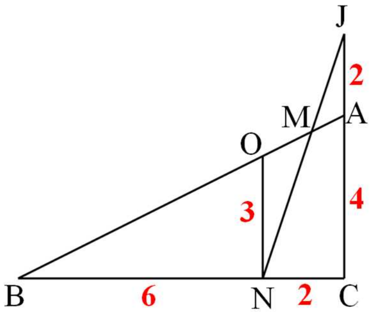
N から CJ に平行な直線を引き，AB との交点を O とする。

△BNO∽△BCA より，ON＝3

よって，△ONM∽△AJM より，

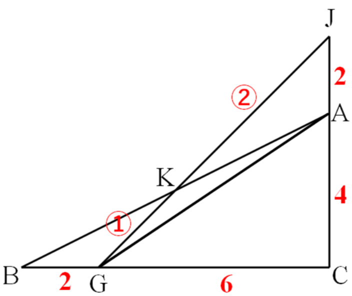
NM：JM＝3：2

$$LM=\frac{2}{5}\times 4=\boxed{\frac{8}{5}}\ \text{cm}$$



（2）（5 点）（正答率 0.7%）**Point 有能な誘導である LM を最大限活用する！**

立体 AKL-CGH＝三角錐 J-CGH－三角錐 L-AKJ



$$三角錐\ J-CGH=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 6\times 4\times 6=24$$

$$\triangle AKJ=\frac{2}{6}\times\frac{2}{3}\times\triangle JGC=4$$

$$三角錐\ L-AKJ=\frac{1}{3}\times 4\times\frac{8}{5}=\frac{32}{15}$$

$$立体\ AKL-CGH=24-\frac{32}{15}=\frac{8(3\times 15-4)}{15}$$

$$=\boxed{\frac{328}{15}}\ \text{cm}^3$$

【コメント】

一番平均点が低かったらしい 2017 年度大阪府 C，その中の空間図形の問題です。～（2）までは，難しくありません，日頃の学習や模試で，これくらいの問題は瞬殺できるようにめちゃんこ練習しておきましょう。特に(2)このくらいの問題が一番差が付きます。

（3）は難しい。「**M は，L を通り辺 AD に平行な直線と辺 AB との交点である。このとき，直線 LM は平面 ABC と垂直である。**」とありますから，このことから色々分かります。

解説に「LM//四角形 BEFC」とありますが，これは「LM⊥平面 ABC，平面 BEFC⊥平面 ABC，よって LM//四角形 BEFC」です。これが分かっても，JM 延長して N にするのさえ思いつくの難しそう。その後の処理は，メネラウスを使うまでもないです。

また，三角錐 L-AKJ の高さは LM になるとすぐ分かるのですが，中々解法は思いつかないかも，単純すぎて。

とにかく露骨な LM をどう扱うかです。有能な誘導です。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 https://hokkaimath.jp/