芸術的な難問高校入試第９０回		
美しさ：★×6	難易度：★×6	得点：　/20

出典：2022 年度　慶應義塾女子高校

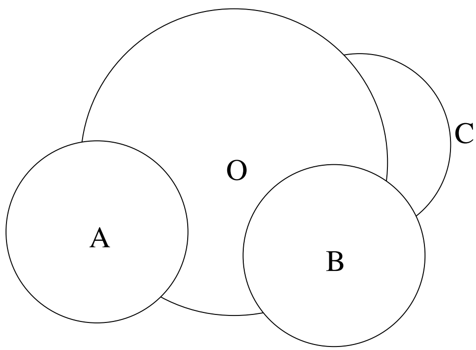
※解答欄に途中の計算なども書く形式

床の上に半径 r cm の球 O と半径 3 cm の球 A，B，C があり，球 O に球 A，B，C が接していて，球 A，B，C の中心を結んでできる図形は正三角形である。次の問いに答えなさい。ただし，$r>3$ とする。

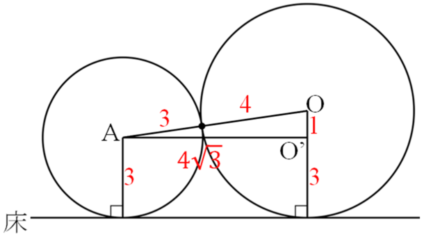
(1) $r=4$ とする。球 O，A，B，C の中心を結んでできる四面体の体積を求めなさい。

(2) $r=12$ とする。底面が床と接し，4 つの球がちょうど入る円柱を考える。この円柱の半径を求めなさい。

(3) $3<r<6$ とする。球 O の中心を通り床と平行な平面で 4 つの球を切ったときの断面積の和を S，球 A，B，C の中心を通り床と平行な平面で 4 つの球を切ったときの断面積の和を T とする。$S:T=5:6$ のとき，r の値を求めなさい。



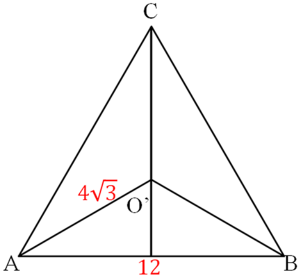
【解答例】



（1）（7 点）

球 O，A の中心を通り，床と垂直な平面で切った断面図で，左図のように点 O’を定める。

$O'A=\sqrt{49-1}=4\sqrt{3}$なので，

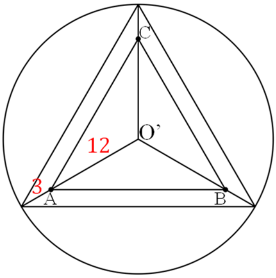


正三角形 ABC の一辺の長さは，

$4\sqrt{3}\times\sqrt{3}=12$ となるから，

求める体積は，

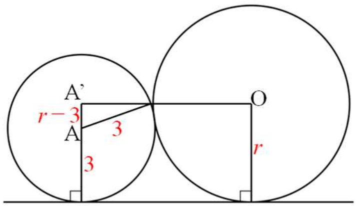
$\frac{1}{3}\times 36\sqrt{3}\times 1=\mathbf{12\sqrt{3}\ cm^3}$

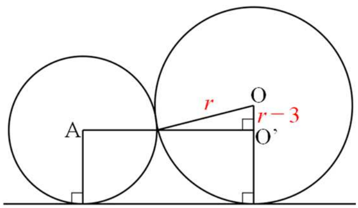


（2）（5 点）

（1）と同様にして，O’A＝$\sqrt{225-81}=12$

よって，円柱の半径は，$12+3=$ **15 cm**





（3）（8 点）

S の球 A, B, C の断面である円の中心を A’, B’，C’とする。

AA’= $r-1$ より，円 A’，B’，C’の半径は，

$\sqrt{9-(r-3)^2}=\sqrt{6r-r^2}$

$S=\left\{3\left(6r-r^2\right)+r^2\right\}\pi=\left(18r-2r^2\right)\pi$

T の球 O の断面である円の中心を O’とする。

円 O’の半径は$\sqrt{r^2-(r-3)^2}=\sqrt{6r-9}$

$T=\{(6r-9)+27\}\pi=(6r-18)\pi$

$5T=6S$より，$30r-90=108r-12r$，$2r^2-13r-15=0$，

$(2r-3)(r-5)=0$，$3<r<6$ より，$\boldsymbol{r=5}$

【コメント】

いかに自分で空間図形を平面図形に直せるかが勝負です。(1) ができなかったらたぶん全滅です。図さえ描ければ（それが難しいのだが，勘違いもあるし）簡単。

解答例の説明だけじゃ物足りない人は，(1) だけ Geogebra で図形作ったのでご覧ください。https://www.geogebra.org/3d/y4vwm9wr

(1) さえ分かれば，(2) は似すぎている問題だし（正三角形の内接円を思い出せば秒殺），(3) は使う線分を誤らなければ余裕なはず。

高校数学では（本当はどんな勉強でも）自分で図を描くということはとても重要です。この問題ができれば，高校数学 A や数学３の空間図形でもあまり困らないかも……？

類題：2018 年度本郷高校：https://hokkaimath.jp/blog-entry-339.html

【作成】　高校入試　数学　良問・難問 https://hokkaimath.jp/