

芸術的な高校入試第91回

難易度：★×6

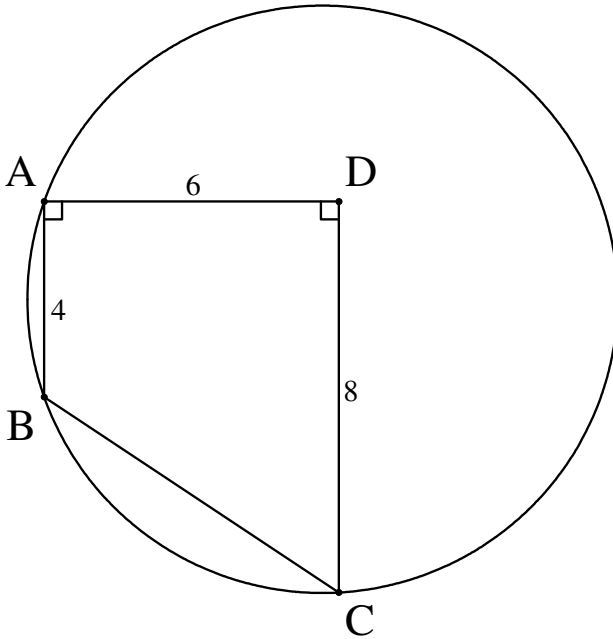
美しさ：★×6

得点

/6

出典不明

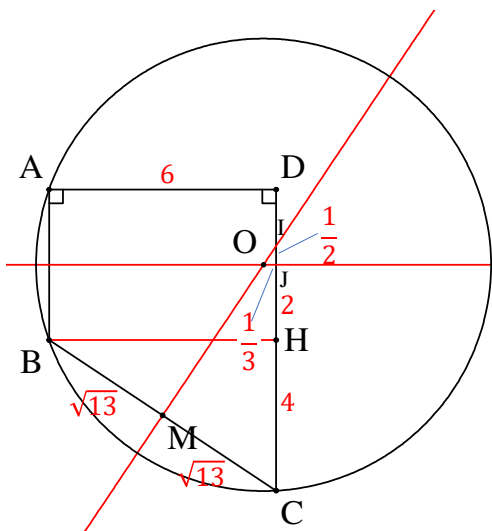
下の図のように、 $AB=4$ 、 $CD=8$ 、 $DA=6$ 、 $\angle BAD=\angle CDA=90^\circ$ である四角形 $ABCD$ と、3点 A 、 B 、 C を通る円がある、この円の半径 R を求めよ。



【解答例】

Point 円の中心の作図を思い出す！

<解答例 1-1>中学生でもギリできる



BC の垂直二等分線と CD の交点を I, AB の垂直二等分線と DC の交点を J とする。2 つの垂直二等分線の交点 O は円の中心となる。

BC の中点を M, 点 B から CD に垂線を下ろし交点を H とする。

$$BC = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$$

$\triangle BCH \sim \triangle ICM$ で,

BC : CH = IC : CM となるから,

$$IC = \frac{13}{2}, \text{ よって, } IJ = \frac{13}{2} - 6 = \frac{1}{2}, \triangle BCH \sim \triangle IOJ \text{ となるので,}$$

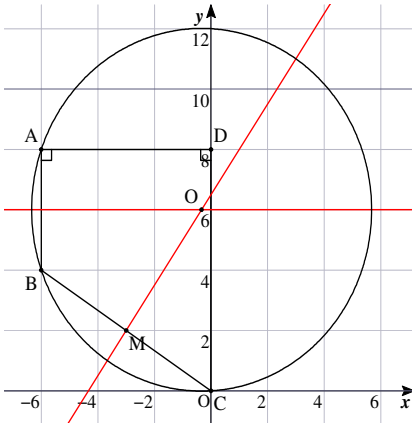
$$BH : CH = IJ : OJ = 3 : 2 \text{ より, } OJ = \frac{1}{3}$$

$$\triangle COJ \text{ で三平方の定理より, } R = OC = \sqrt{6^2 + \frac{1}{3^2}} = \sqrt{\frac{325}{9}} = \frac{5\sqrt{13}}{3}$$

【コメント】

インスタグラムで外国から流れてきた問題です。誰が作った問題かは不明です。インスタでは、解答例 2 を用いて解いていました。解答例 1-1 のように、無理やり中学生でも解くことができます。なかなか良い問題ですね、円の作図を思い出せれば、ある程度能力ある子ならすんなり解けます。まあ、私は<解答例 1>を思いつくのに物凄く時間かかりましたが.....

<解答例 1-2> 高校生用だが中学生でもいける



$C(0,0)$, $D(0,8)$, $A(-6, 8)$, $B(-6, 4)$ とする。 AB の垂直二等分線 $y=6$ と、 BC の垂直二等分線 $y = \frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$ の交点が、円の中心となる。

※ BC の中点 $M(-3, 2)$ で、 BC の傾きが $-\frac{2}{3}$ であることから、垂直二等分線の傾きは $\frac{3}{2}$ となる。

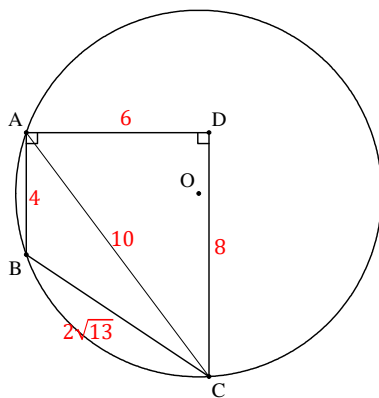
※2直線が垂直に交わる時、傾きの積は-1となる。

$y = 6$ と $y = \frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$ の交点は、 $6 = \frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$ より、 $x = -\frac{1}{3}$ となるので、

$$O\left(-\frac{1}{3}, 6\right), R = OC = \sqrt{6^2 + \frac{1}{3^2}} = \sqrt{\frac{325}{9}} = \frac{5\sqrt{13}}{3}$$

※もちろん、3点 A, B, C を連立して円の方程式出しても良いが、面倒。

<解答例 2> 正弦定理のあれ、高校生用



$$AC = 10, BC = 2\sqrt{13}$$

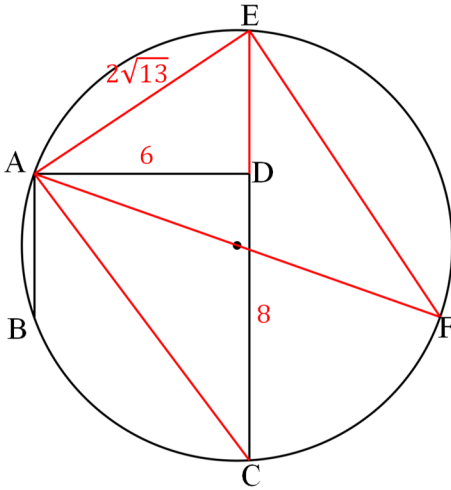
$\triangle ABC = 12$ となるが、ここで、円周上の3点を結んでできる三角形の面積は、三角形の辺の長さを a, b, c , 半径を R とする

$$\text{と, } \frac{abc}{4R} \text{ であるから, } 12 = \frac{80\sqrt{13}}{4R}$$

$$R = \frac{5\sqrt{13}}{3}$$

※公式の証明はググってください。高校生が覚えるような公式でもない気がします、すぐ導けるし。sin 必要だけど。

<解答例 4> コメントでもらったもの



直線 CD と円周の交点を E とする。
 $AB \perp EC$ なので、線分 CE は AB の垂直二等分線に対して線対称となる。
 よって、四角形 ABCE は等脚台形となり、 $AE = BC = 2\sqrt{13}$
 円の中心を O とし、直線 AO と円周の交点を F とする。 $\triangle ADC \sim \triangle AEF$ なので、

$$AF = \frac{2\sqrt{13} \times 10}{6} = \frac{10\sqrt{13}}{3},$$

$$R = \frac{5\sqrt{13}}{3}$$

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>