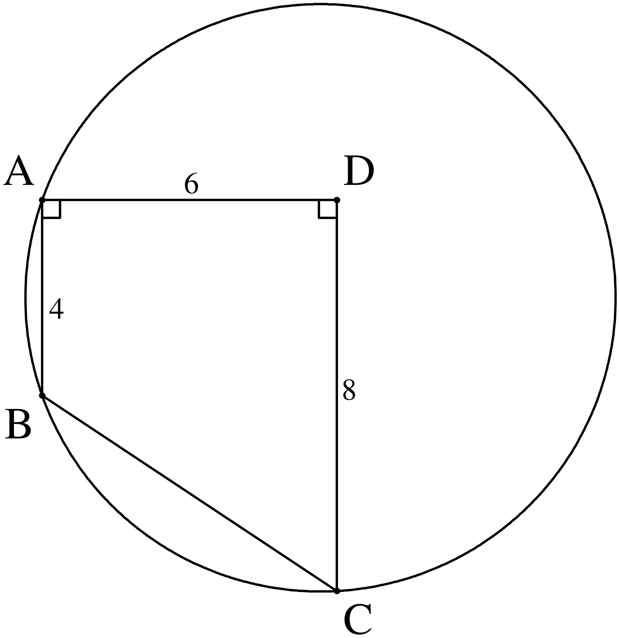
芸術的な高校入試第９１回		
難易度：★×6	美しさ：★×6	得点　　　　/6

出典不明

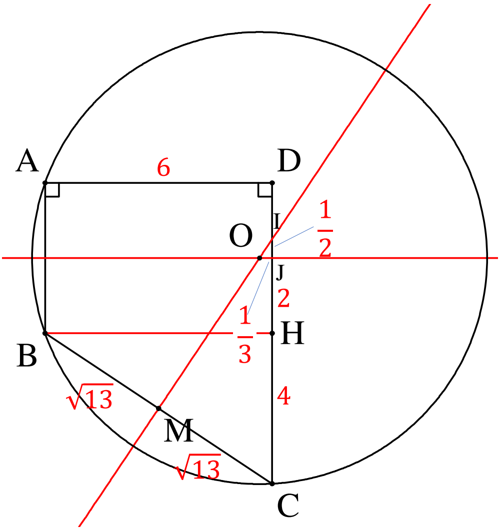
下の図のように，AB＝4，CD＝8，DA＝6，∠BAD＝∠CDA＝90°である四角形 ABCD と，３点 A，B，C を通る円がある，この円の半径 R を求めよ。



【解答例】

Point 円の中心の作図を思い出す！

＜解答例 1-1＞中学生でもギリできる



BC の垂直二等分線と CD の交点を I, AB の垂直二等分線と DC の交点を J とする。2 つの垂直二等分線の交点 O は円の中心となる。

BC の中点を M，点 B から CD に垂線を下ろし交点を H とする。

BC= $\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$

△BCH ∽△ICM で，

BC：CH＝IC：CM となるから，

$IC=\frac{13}{2}$，よって，$IJ=\frac{13}{2}-6=\frac{1}{2}$， △BCH ∽△IOJ となるので，

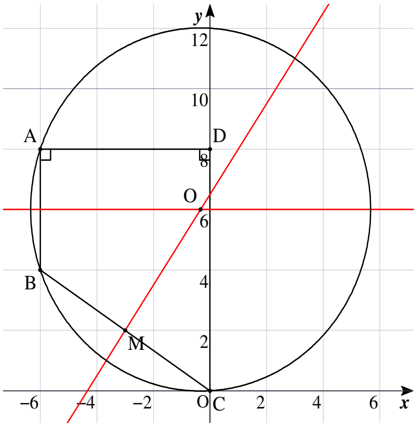
BH：CH = IJ：OJ = 3：2 より，$OJ=\frac{1}{3}$

△COJ で三平方の定理より，$R=OC=\sqrt{6^2+\frac{1}{3^2}}=\sqrt{\frac{325}{9}}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{13}}{3}}$

【コメント】

インスタグラムで外国から流れてきた問題です。誰が作った問題かは不明です。インスタでは，解答例 2 を用いて解いていました。解答例 1-1 のように，無理やり中学生でも解くことが出来ます。なかなか良い問題ですね, 円の作図を思い出せれば, ある程度能力ある子ならすんなり解けます。まあ，私は＜解答例 1＞を思いつくのに物凄く時間かかりましたが……。

＜解答例 **1-2**＞高校生用だが中学生でもいける



C(0,0)，D(0,8)，A(−6, 8)，B(−6, 4)とする。AB の垂直二等分線 $y=6$ と，BC の垂直二等分線$y=\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}$の交点が，円の中心となる。

※BC の中点 M(−3, 2)で，BC の傾きが$-\frac{2}{3}$であることから，垂直二等分線の傾きは$\frac{3}{2}$となる。

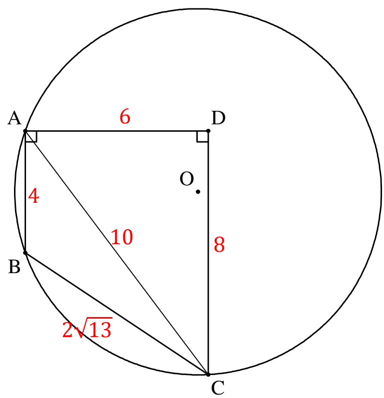
※２直線が垂直に交わるとき，傾きの積は−1 となる。

$y=6$ と$y=\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}$の交点は，$6=\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}$より，$x=-\frac{1}{3}$となるので，

$\mathrm{O}\left(-\frac{1}{3},6\right)$，$R=\mathrm{OC}=\sqrt{6^2+\frac{1}{3^2}}=\sqrt{\frac{325}{9}}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{13}}{3}}$

※もちろん，3 点 A，B，C を連立して円の方程式出しても良いが，面倒。

＜解答例 **2**＞正弦定理のあれ，高校生用



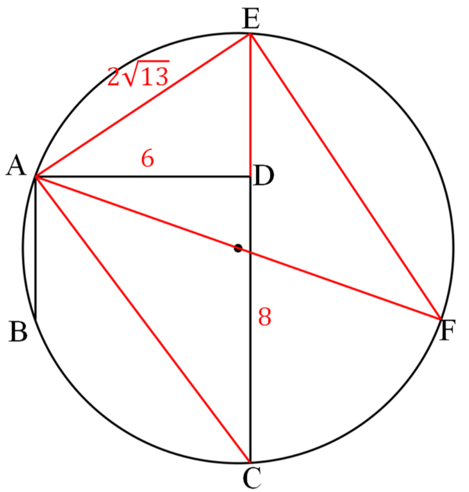
$\mathrm{AC}=10$，$\mathrm{BC}=2\sqrt{13}$

△ABC＝12 となるが，ここで，円周上の３点を結んでできる三角形の面積は, 三角形の辺の長さを a，b，c，半径を R とすると，$\frac{abc}{4R}$であるから，$12=\frac{80\sqrt{13}}{4R}$

$R=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{13}}{3}}$

※公式の証明はググってください。高校生が覚えるような公式でもない気がします，すぐ導けるし。sin 必要だけど。

＜解答例 4＞コメントでもらったもの



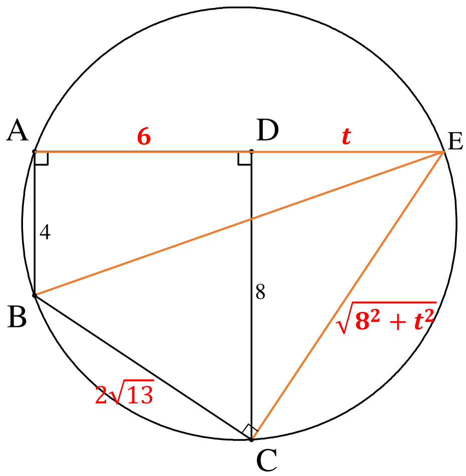
直線 CD と円周の交点を E とする。AB//EC なので，線分 CE は AB の垂直二等分線に対して線対称となる。よって，四角形 ABCE は等脚台形となり，AE＝BC＝$2\sqrt{13}$

円の中心を O とし，直線 AO と円周の交点を F とする。△ADC∽△AEF なので，

$$AF=\frac{2\sqrt{13}\times 10}{6}=\frac{10\sqrt{13}}{3},$$

$$\boldsymbol{R=\frac{5\sqrt{13}}{3}}$$

＜解答例 5＞メールフォームおよびコメントで貰ったもの



AD を延長し円周との交点を E とする。BE は直径となる。

$$BE^2=16+(6+t)^2=52+64+t^2$$

これを解いて，

$t=\dfrac{16}{3}$ だから，$BE^2=\dfrac{1300}{9}$

$$R=\frac{1}{2}BE=\frac{\sqrt{325}}{3}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{13}}{3}}$$